CONTROL 20 EXAMEN EXTRAORDINARIO 18 junio 08

1. Halla el máximo absoluto de la función definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 1$.

2. Halla razonadamente las ecuaciones de tres rectas que pasan por el punto $P(-2\ ,\ 3)$ y además:
   - La primera es paralela al eje de abscisas.
   - La segunda es la gráfica de una función lineal.
   - La tercera es paralela a la recta $y = 3x + 1$.

3. Halla los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y $\sqrt{3}$ cm, respectivamente.

4. Resuelve por reducción el sistema: $\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 3x - 2y = 2'1 \end{cases}$

5. Resuelve la inecuación: $\frac{2}{3}(x+3) - \frac{1}{2}(x+1) < 1 + \frac{3}{4}(x+3)$

6. Resuelve la ecuación: $x^4 = 13x^2 - 36$

7. Simplifica la fracción: $\dfrac{2x^4 - 18x^2}{3x^3 + 6x^2 - 9x}$

8. Si $\log A = 2$, $\log B = 3$ y $\log C = 4$ ¿Cuál es el valor de $\log\left(\dfrac{A^5 B}{10\,C}\right)$?

9. Racionaliza y simplifica: $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

10. Al medir con una probeta un volumen de $7'64$ ml se cometió un error de $0'015$ ml.
    (a) ¿Cuál es el resultado que se obtuvo?
    (b) ¿Cuánto vale el error relativo? (Exprésalo en notación científica con tres cifras significativas)

1. La gráfica de la función definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 1$ es una parábola (por ser cuadrática), con las ramas hacia abajo (por ser negativo, -1, el coeficiente de x^2; por lo tanto, el máximo de la función corresponde al vértice, cuyas coordenadas son:

$$\text{Vértice: } \begin{cases} x_v = \dfrac{-B}{2A} = \dfrac{-6}{2\cdot(-1)} = 3 \\ y_V = f(3) = -3^2 + 6\cdot 3 - 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{El máximo de } f \text{ es el punto } V(3\ ,\ 8)}$$

2. La ecuación de las funciones cuya gráfica es una recta es de la forma $y = mx + b$ en la que m es la pendiente de la recta y b su ordenada en el origen (que es el valor de y que corresponde a $x = 0$)

   - La primera recta, al ser paralela al eje de abscisas, tiene de pendiente $m = 0$ y corresponde a una función constante, ya que todos los puntos tienen la misma ordenada, que es la del punto $P(-2\ ,\ 3)$ es decir $y = 3$.

La ecuación de la primera recta es: $\boxed{y = 3}$

- Al corresponder a una función lineal (o de proporcionalidad directa), la ordenada en el origen de la segunda recta es $b=0$, su ecuación es de la forma $y=mx$ y, como pasa por el punto $P(-2\ ,\ 3)$ tiene que cumplirse si $x=-2$ e $y=3$ por lo tanto:

$$3=m\cdot(-2)\ \Rightarrow\ m=-\frac{3}{2}$$

La ecuación de la segunda recta es: $\boxed{y=-\frac{3}{2}x}$

- Las rectas paralelas tienen la misma pendiente y como la de la recta $y=3x+1$ es $m=3$ la tercera recta es de la forma $y=3x+b$ y, por pasar por el punto $P(-2\ ,\ 3)$ se tiene que cumplir que $3=3(-2)+b\ \Rightarrow\ b=9$

La ecuación de la tercera recta es: $\boxed{y=3x+9}$

3. Sean: $\hat{A}$ el ángulo recto; $\hat{B}$ el opuesto al cateto de 3 cm y $\hat{C}$ el otro ángulo.

Como $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ y $\hat{A}=90^\circ\ \Rightarrow\ \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$

Por definición de tangente: $tg\ \hat{B}=\frac{3}{\sqrt{3}}\xrightarrow{CALACULADORA}\hat{B}=60^\circ$ por lo que $\hat{C}=90-\hat{B}=30^\circ$

$\boxed{\text{Los ángulos valen: } \hat{A}=90^\circ,\ \hat{B}=60^\circ\ \text{ y }\ \hat{C}=30^\circ}$

4. $$\left.\begin{cases}5x+4y=-2 \longrightarrow & 5x+4y=-2\\ 3x-2y=2'1 \xrightarrow{\cdot 2} & 6x-4y=4'2\end{cases}\right\}\xrightarrow{+}11x=2'2\ \Rightarrow x=0'2$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y operando, obtenemos el valor de y:

$$3\cdot 0'2-2y=2'1\ \Rightarrow 2y=-1'5\ \Rightarrow\ y=-0'75$$

$\boxed{\text{Solución: }\begin{cases}x=\ \ 0'2\\ y=-0'75\end{cases}}$

5. $$\frac{2}{3}(x+3)-\frac{1}{2}(x+1)<1+\frac{3}{4}(x+3)\ \Rightarrow\ \frac{2x+6}{3}+\frac{-x-1}{2}<1+\frac{3x+9}{4}\xrightarrow{\cdot 12}$$

$$8x+24-6x-6<12+9x+27\ \Rightarrow -7x<21\xrightarrow{\cdot(-1)}7x>-21\ \Rightarrow\ \boxed{x>-3}\ \Rightarrow\ \boxed{S=(-3\ ,\ +\infty)}$$

6. $x^4=13x^2-36\ \Rightarrow\ x^4-13x^2+36=0\ \Rightarrow$ {cambio de variable: $x^2=t$} $\Rightarrow\ t^2-13t+36=0\ \Rightarrow$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}t_1=9\Rightarrow x^2=9\ \Rightarrow\ x=\pm 3\\ t_2=4\Rightarrow x^2=4\ \Rightarrow\ x=\pm 2\end{cases}$$

$\boxed{\text{Las cuatro soluciones son: } x=\begin{cases}\pm 3\\ \pm 2\end{cases}}$

7. $\dfrac{2x^4-18x^2}{3x^3+6x^2-9x} = \dfrac{2x^2(x^2-9)}{3x(x^2+2x-3)} = \dfrac{2x^2(x+3)(x-3)}{3x(x-1)(x+3)} = \boxed{\dfrac{2x(x-3)}{3(x-1)}} = \boxed{\dfrac{2x^2-6x}{3x-3}}$

8. $\log A = 2$, $\log B = 3$ y $\log C = 4$

$$\log\left(\frac{A^5 B}{10\,C}\right) = \log(A^5\cdot B) - \log(10\cdot C) = 5\cdot\log A + \log B - (\log 10 + \log C) = 5\cdot 2 + 3 - (1+4) = \boxed{8}$$

9. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2} = \boxed{-2+\sqrt{3}}$

10. (a) El valor real es $7'64$ ml; si se cometió un error de $0'015$ ml. Los posibles resultados obtenidos son:

Por exceso ($0'015$ ml de más) $7'64 + 0'015 = \boxed{7'655\text{ ml}}$

Por defecto ($0'015$ ml de menos) $7'64 - 0'015 = \boxed{7'625\text{ ml}}$

(b) Error relativo $= \dfrac{Error\_absoluto}{Valor\_real} = \dfrac{0'015}{7'64} = 0'00196335\ldots = \boxed{1'96\cdot 10^{-3}}$

CONTROL 19 EXAMEN FINAL 10 junio 08

1. Halla razonadamente el recorrido de la función definida por $f(x)=18x^2+12x-1$.
2. Halla razonadamente la ecuación de la recta que pasa por los puntos A$(-1\,,2)$ y B$(0\,,-4)$.
3. Halla razonadamente el valor de $\cos\alpha$ si $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$ y α es un ángulo agudo.
4. Resuelve razonadamente la inecuación: $(x-2)^2 \geq 2x(x-2)$
5. Resuelve razonadamente la ecuación $3x^3-2x+1=0$
6. Indica razonadamente el número de soluciones que tienen las ecuaciones de primer grado, $Ax=B$, según sean, iguales o distintos de cero, los valores de A o/y B.
7. Reduce a una sola fracción simplificando lo más posible: $\dfrac{x-2}{x^2-x-2}-\dfrac{x+2}{3x+3}:\dfrac{x^2+2x}{3x-3}$
8. A partir de las definiciones de raíz y de logaritmo, justifica -sin utilizar la calculadora- cuánto valen la raíz cúbica de -8 y el logaritmo en base 4 de 16.
9. Pasa a una sola potencia de exponente positivo y base lo más sencilla posible: $\dfrac{(3^{-5}\cdot 9)^4}{\sqrt{3}:\ 27}$
10. Haz un esquema de la clasificación de los números reales y di, justificando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
    - Todo número decimal es racional.
    - Hay números fraccionarios que son irracionales.
    - Todos los números positivos son naturales.

1. Recorrido de f siendo $f(x)=18x^2+12x-1$:

El recorrido de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, es decir, conjunto de valores de $f(x)$. Como en este caso se trata de una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo, su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba por lo que el punto más bajo es el vértice y el recorrido es el intervalo que va desde la imagen de dicho punto, es decir, desde $f(\frac{-B}{2A})$ hasta $+\infty$.

$$x=\frac{-B}{2A}=\frac{-12}{2\cdot 18}=\frac{-1}{3} \Rightarrow f(\frac{-1}{3})=18\left(\frac{-1}{3}\right)^2+12\left(\frac{-1}{3}\right)-1=-3 \Rightarrow \text{El vértice es } V(-1/3,-3)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Recorrido de } f\\ R(f)=[-3,+\infty)\end{array}}$$

2. Recta que pasa por $A(-1\,,2)$ y $B(0\,,-4)$:

La ecuación de toda recta es de la forma $y=mx+b$ en la que $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es la pendiente y b es la ordenada en el origen, es decir, el valor de y en el punto en que $x=0$; por lo tanto, en este caso, el punto $B(0\,,-4)$ nos indica que $b=-4$

$$\text{La pendiente es: } m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4-2}{0-(-1)}=\frac{-6}{1}=-6$$

Como la recta que pasa por $A(-1\ ,\ 2)$ y $B(0\ ,\ -4)$ tiene $m=-6$ y $b=-4$ su ecuación es:

$$\boxed{y=-6x-4}$$

Comprobación: $y=-6x-4$ $\begin{cases} A \xrightarrow{x=-1,\,y=2} 2=-6\cdot(-1)-4 & SÍ \\ B \xrightarrow{x=0,\,y=-4} -4=-6\cdot 0-4 & SÍ \end{cases}$

3. $\text{tg}\,\alpha=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha=\text{arc}\,tg\sqrt{3} \xrightarrow{CALACULADORA} \alpha=60^{\circ} \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\cos 60^{\circ}=\boxed{\frac{1}{2}}$ (calculadora)

4. $(x-2)^2 \ge 2x(x-2) \;\Rightarrow\; x^2-4x+4 \ge 2x^2-4x \;\Rightarrow\; -x^2+4 \ge 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2-4 \le 0}$

Fronteras: $x^2-4=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 2$

Estudiamos el signo del valor numérico de de x^2-4 para los distintos valores de x:

Valor de x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$x=2$	$x>2$
Signo de x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
		$x^2-4\le 0$			

$$\boxed{\begin{array}{c} -2<x<2 \\ S=[-2\ ,+2] \end{array}}$$

5. $3x^3-2x+1=0$ Para resolverla factorizamos el primer miembro:

$(x+1)\cdot(3x^2-3x+1)=0 \;\Rightarrow$ Alguno de los dos factores tiene que valer 0:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x+1=0 & \Rightarrow & x=-1 \\ o & & \\ 3x^2-3x+1=0 & \Rightarrow & x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{6}\notin\Re \end{array} \right\}$$

La única solución es: $\boxed{x=-1}$

6. Número de soluciones de $Ax=B$, según los valores de A y B:

$Ax=B$	$B=0$	$B\neq 0$
$A=0$	$0x=0$; se trata de una identidad, se cumple para cualquier valor de x porque 0 multiplicado por cualquier número da 0.	No se cumple para ningún valor de x porque todo número multiplicado por 0 es igual a 0 Ejemplo: $0x=0$, Imposible.

$A \neq 0$	Tiene como única solución $x = 0$ porque si un producto vale 0, necesariamente un factor es 0. Ejemplo: $4x = 0 \Rightarrow x = 0$	Tiene como solución el valor $x = \dfrac{B}{A}$ Ejemplo: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$

7. $$\frac{x-2}{x^2-x-2} - \frac{x+2}{3x+3} : \frac{x^2+2x}{3x-3} = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \frac{(x+2)}{3(x+1)} \frac{3(x-1)}{x(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{(x-1)}{(x+1)x} =$$
$$= \frac{x}{(x+1)x} + \frac{-x+1}{(x+1)x} = \boxed{\frac{1}{x^2+x}}$$

8. ○ Raíz n-ésima de un número A, es otro número, x, que elevado al índice, n, da A; es decir:

$\sqrt[n]{A} = x$ significa que $x^n = A$; por lo tanto: $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

○ Logaritmo de un número, N, en una base, a (positiva y distinta de 1), es el exponente, x al que hay que elevar a la base, a, para obtener dicho número, N; es decir:

$\log_a N = x$ significa que $a^x = N$; por lo tanto: $\boxed{\log_4 16 = 2}$ porque $4^2 = 16$

9. $$\frac{\left(3^{-5} \cdot 9\right)^4}{\sqrt{3} : 27} = \frac{\left(3^{-5} \cdot 3^2\right)^4}{3^{1/2} : 3^3} = \frac{\left(3^{-5+2}\right)^4}{3^{1/2-3}} = \frac{3^{-3\cdot 4}}{3^{-5/2}} = 3^{-12-\left(-5/2\right)} = 3^{-19/2} = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{19/2}}$$

10. Clasificación de los números reales:

- *Reales*
  - *Racionales*
    - *Enteros*
      - *Naturales* $\Leftrightarrow$ *Enteros positivos*
      - *0* (cero)
      - *Enteros negativos*
    - *Fraccionarios* $\Leftrightarrow$
      - *Decimales exactos* (periodo = 0)
      - *Decimales periódicos*
        - *Puros*
        - *Mixtos*
  - *Irracionales* $\Leftrightarrow$ *Decimales ilimitados pero NO periódicos*

– *Todo número decimal es racional.* FALSO.

Solo son racionales los decimales limitados (o de periodo, 0) y los ilimitados periódicos. Los números con infinitas cifras decimales no periódicos, son irracionales, por ejemplo: π, $\sqrt{2}$ …

– *Hay números fraccionarios que son irracionales.* FALSO.

Como se ve en el esquema, los números fraccionarios son racionales.

– *Todos los números positivos son naturales.* FALSO.

Para que un número sea natural, además de positivo, tiene que ser entero. Por ejemplo los números 0'5, 2/3, π ... son positivos y no son naturales.

CONTROL 18 FUNCIONES 30 MAYO 08

1. Sea f la función definida por la expresión: $f(x)=2x^2+5x-3$. Halla razonadamente:
- *a) La imagen de 1.*
- *b) Las antiimágenes de −3.*
- *c) Los puntos de corte con el eje X.*
- *d) El punto de corte con el eje Y.*
- *e) La tasa de variación media en el intervalo [−1 , 2]*

a) La imagen de 1, es el valor de $f(x)$ que corresponde a $x=1$, por lo tanto:

$$f(1)=2\cdot 1^2+5\cdot 1-3=\boxed{4}$$

b) Las antiimágenes de -3 son los valores de x que tienen por imagen -3, es decir:

$$f(x)=-3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+5x-3=-3$$ Resolviendo la ecuación:

$$2x^2+5x=0 \Rightarrow x\cdot(2x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+5=0 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-2'5 \end{cases}$$

Las antiimágenes de -3 son $\boxed{0 \text{ y } -2'5}$

Comprobación: $\begin{cases} f(0)=2\cdot 0^2+5\cdot 0-3=-3 \\ f(-2'5)=2\cdot(-2'5)^2+5\cdot(-2'5)-3=-3 \end{cases}$

c) En los puntos en que la gráfica de f corta al eje X, su ordenada, y, vale 0, es decir:

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x^2+5x-3=0$$

Resolvemos la ecuación aplicando la fórmula:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 7}{4}=\begin{cases} x=1/2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Los puntos en que la gráfica de f corta al eje X son: $\boxed{\begin{cases} \mathrm{Q}(1/2\,,0) \\ \mathrm{R}(-3\,,0) \end{cases}}$

Comprobación: $\begin{cases} f(1/2)=2\cdot(1/2)^2+5\cdot(1/2)-3=0 \\ f(-3)=2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-3=0 \end{cases}$

d) En el punto en el que la gráfica de f corta al eje Y, la x vale 0 y como $f(0)=-3$,

dicho punto es el $\boxed{P(0\ ,\ -3)}$

e) Tasa de variación media:

$$TVM\,[-1\ ,\ 2]=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=*=\frac{15-(-6)}{3}=\boxed{7}$$

(*) $f(2)=2\cdot 2^2+5\cdot 2-3=15$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1) - 3 = -6$$

2. *Halla razonadamente las ecuaciones de cinco rectas que pasan por el punto* $P(1\ ,\ -2)$ *y además:*
   - *a) La primera es paralela al eje de abscisas.*
   - *b) La segunda es la gráfica de una función lineal.*
   - *c) La ordenada en el origen de la tercera es 3.*
   - *d) La cuarta es paralela a la recta* $y = 4x + 2$
   - *e) La quinta pasa por el punto* $Q(-2\ ,\ 1)$

La ecuación de las funciones cuya gráfica es una recta es de la forma $y = mx + b$ en la que m es la pendiente de la recta y b su ordenada en el origen (que es el valor de y que corresponde a $x = 0$)

a) La primera recta, al ser paralela al eje de abscisas, tiene de pendiente $m = 0$ y corresponde a una función constante, ya que todos los puntos tienen la misma ordenada, que es la del punto $P(1\ ,\ -2)$ es decir $y = -2$.

La ecuación de la primera recta es: $\boxed{y = -2}$

b) Al corresponder a una función lineal (o de proporcionalidad directa), la ordenada en el origen de la segunda recta es $b = 0$, su ecuación es de la forma $y = mx$ y, como pasa por el punto $P(1\ ,\ -2)$ tiene que cumplirse si $x = 1$ e $y = -2$ por lo tanto:

$$-2 = m\cdot 1 \ \Rightarrow\ m = -2$$

La ecuación de la segunda recta es: $\boxed{y = -2x}$

c) La tercera recta, tiene como ordenada en el origen $b = 3$ por lo tanto su ecuación es $y = mx + 3$ y, por pasar por el punto $P(1\ ,\ -2)$ se tiene que cumplir que $-2 = m\cdot 1 + 3 \Rightarrow m = -5$

La ecuación de la tercera recta es: $\boxed{y = -5x + 3}$

d) Las rectas paralelas tienen la misma pendiente y como la de la recta $y = 4x + 2$ es $m = 4$ la cuarta recta es de la forma $y = 4x + b$ y, por pasar por el punto $P(1\ ,\ -2)$ se tiene que cumplir que $-2 = 4\cdot 1 + b \ \Rightarrow\ b = -6$

La ecuación de la cuarta recta es: $\boxed{y = 4x - 6}$

e) La quinta recta pasa por los puntos $P(1\ ,\ -2)$ y $Q(-2\ ,\ 1)$ por lo que su pendiente es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-2)}{-2-1} = \frac{3}{-3} = -1$$

Por tener de pendiente $m = -1$ su ecuación es $y = -x + b$

y por pasar por $P(1\ ,\ -2)$: $-2 = -1 + b$ por lo que $b = -1$

La ecuación de la quinta recta es: $\boxed{y = -x - 1}$

CONTROL 17 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA 09 MAYO 08

1. Sean A, B, C los vértices de un triángulo del que conocemos $\overline{BC} = 10$ cm, $\hat{B} = 20^\circ$ y $\hat{C} = 40^\circ$. Halla la altura h_A.

Sea P el punto en que h_A corta a la base $\overline{BC}$. Esta altura divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos PAB y PAC.

Si $\overline{BP} = x$ cm, entonces $\overline{PC} = (10 - x)$ cm

En el triángulo PAB: $tg\,20^\circ = \dfrac{h_A}{x} \Rightarrow h_A = x \cdot tg\,20$ (*)

En el triángulo PAC: $tg\,40^\circ = \dfrac{h_a}{(10 - x)} \Rightarrow h_A = (10 - x) \cdot tg\,40$

$\Rightarrow x tg\,20 = 10 tg\,40 - x tg\,40$

$\Rightarrow x tg\,20 + x tg\,40 = 10 tg\,40 \Rightarrow x(tg\,20 + tg\,40) = 10 tg\,40 \Rightarrow x = \dfrac{10 tg\,40}{tg\,20 + tg\,40}$ y, sustituyendo en la ecuación (*) obtenemos: $h_A = \dfrac{10 \cdot tg\,40 \cdot tg\,20}{tg\,20 + tg\,40} \cong \boxed{2'54 \text{ cm}}$

2. Resuelve la inecuación: $2x^3 + 18x > 12x^2$

$2x^3 + 18x > 12x^2 \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 + 18x > 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 6x + 9) > 0 \Rightarrow \boxed{2x(x-3)^2 > 0}$

Fronteras: $2x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Signo de $2x(x-3)^2$ para los distintos valores de x:

Valores de x $\rightarrow$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$2x(x-3)^2$ $\rightarrow$	NEGATIVO	0	POSITIVO	0	POSITIVO

Conjunto solución:
$S = (0, +\infty) - \{3\}$

3. Resuelve la ecuación: $\dfrac{3(2x+4) - (x-2)}{x + \frac{2}{3}(7+x)} = 3$

$$\frac{3(2x+4) - (x-2)}{x + \frac{2}{3}(7+x)} = 3 \Rightarrow \frac{6x + 12 - x + 2}{x + \frac{14}{3} + \frac{2}{3}x} = 3 \Rightarrow 5x + 14 = 3x + 14 + 2x \Rightarrow 0x = 0$$

Se cumple para cualquier valor de x, se trata de una identidad.

4. Resuelve la ecuación: $1 = 5 - 2\sqrt{\dfrac{x^2-5}{2x+1}}$

$$1 = 5 - 2\sqrt{\frac{x^2-5}{2x+1}} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{x^2-5}{2x+1}} = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2-5}{2x+1}} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2-5}{2x+1}}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{x^2-5}{2x+1} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5 = 8x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x-9)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -1 \end{cases}$$

Comprobaciones en la ecuación original:

$x = 9$

$$1 = 5 - 2\sqrt{\frac{9^2-5}{2\cdot 9+1}} \Rightarrow 1 = 1$$

Si es solución

$x = -1$

$$1 = 5 - 2\sqrt{\frac{(-1)^2-5}{2\cdot(-1)+1}} \Rightarrow 1 = 1$$

Si es solución

Soluciones:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 9 \\ y \\ x = -1 \end{matrix}}$$

5. Un comerciante compra una bicicleta y un balón por 412 € y los vende por 448’60 €. ¿Cuánto pagó por cada artículo si en la venta de la bicicleta gana el 9% y en la del balón, el 5%?

Sean $\begin{cases} x, \text{ el precio que pagó el comerciante por la bicicleta} \\ y, \text{ el precio que el comerciante pagó por balón} \end{cases}$

La primera ecuación la obtenemos a partir del precio de compra: $x + y = 412$

Y, la segunda, la sacamos del precio de venta: $x + 9\% \text{ de } x + y + 5\% \text{ de } y = 448'60$

Simplificamos esta segunda ecuación:

$$x + \frac{9}{100}x + y + \frac{5}{100}y = 448'60 \Rightarrow 100x + 9x + 100y + 5y = 44860 \Rightarrow 109x + 105y = 44860$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 412 \\ 109x + 105y = 44860 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -105x - 105y = -43260 \\ 109x + 105y = 44860 \end{cases} \Rightarrow 4x = 1600 \Rightarrow x = 400$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación: $400 + y = 412 \Rightarrow y = 12$

$\boxed{\text{El comerciante pagó } 400\text{ € por la bicicleta y } 12\text{ € por el balón.}}$

CONTROL 16 — ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA — 25 ABRIL 08

1*a*) Sabiendo que $\operatorname{cosec}\alpha = 4$
halla el valor de α
(redondeado en las centésimas de grado).

$$\operatorname{Cosec}\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{4} = 14'48^{o}$$

$$\boxed{\alpha = 14'48^{o}}$$

1*b*) Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 60^{o} y el cateto opuesto a dicho ángulo es de $\sqrt{3}$ cm.
Halla el otro cateto.

$$\operatorname{tg} 60^{o} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Cateto contiguo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\operatorname{tg} 60^{o}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\boxed{\text{El otro cateto mide:} \quad 1 \text{ cm}}$$

2. Resuelve: $4x^4 + 9x = 4x^3 + 9x^2$

$$4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 9x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(4x^3 - 4x^2 - 9x + 9) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(x-1)(4x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow$$

Alguno de los factores tiene que ser 0

- $x = 0$
- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$

$$x = \pm\frac{3}{2}$$

Solución: $\boxed{x = 0,\ 1,\ +\frac{3}{2} \text{ y } -\frac{3}{2}}$

Comprobaciones en la ecuación original:

$x = 0$	$\Rightarrow$	$0 = 0$
$x = 1$	$\Rightarrow$	$13 = 13$
$x = 3/2$	$\Rightarrow$	$33'75 = 33'75$
$x = -3/2$	$\Rightarrow$	$6'75 = 6'75$

3. Resuelve: $1 - \sqrt{4-x} = x + 3$

$$-\sqrt{4-x} = x + 2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(-\sqrt{4-x}\right)^2 = (x+2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$4 - x = x^2 + 4x + 4 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 5x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(x+5) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ x + 5 = 0 \quad \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Comprobación en la ecuación inicial:

$$x = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{4-0} = 0 + 3 \Rightarrow$$

$$-1 = 3 \quad \Rightarrow \text{NO}$$

$$x = -5 \Rightarrow 1 - \sqrt{4+5} = -5 + 3 \Rightarrow$$

$$-2 = -2 \quad \Rightarrow \text{SÍ}$$

Solución: $\boxed{x = -5}$

4. Resuelve la inecuación: $\dfrac{6}{x-1} \leq 2$

$$\frac{6}{x-1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{8-2x}{x-1} \leq 0$$

Fronteras: $\begin{cases} 8-2x=0 & \Rightarrow & x=4 \\ x-1=0 & \Rightarrow & x=1 \end{cases}$

Signo de $\dfrac{8-2x}{x-1}$ para los distintos valores de x:

$(-\infty, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$\frac{+}{-}$	$\frac{6}{0}$	$\frac{+}{+}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{-}{+}$
NEGATIVO	x	POSITIVO	0	NEGATIVO
$x < 1$			$x \geq 4$	

Solución: $\boxed{S = (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)}$

5. Halla las edades de una madre y su hijo sabiendo que, en el año 2002 la edad de la madre era el triple que la del hijo y, en el 2012 será el doble.

Sea: $\begin{cases} x & \text{la edad de la madre} \\ y & \text{la edad del hijo} \end{cases}$

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Año	2002	2008	2012
Edad de la madre	$x-6$	x	$x+4$
Edad del hijo	$y-6$	y	$y+4$

Ecuaciones:

$$\begin{cases} x-6=3(y-6) \\ x+4=2(y+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6=3y-18 \\ x+4=2y+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y=-12 & E_1 \\ x-2y=4 & E_2 \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{-E_1+E_2} y=16$$

Sustituyendo en E_2: $x-32=4 \Rightarrow x=36$

Comprobaciones

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Año	2002	2008	2012
Edad de la madre	30	36	40
Edad del hijo	10	16	20

$30 = 3 \cdot 10$ $\qquad$ $40 = 2 \cdot 20$

Edades:

$\boxed{\text{Madre: 36 años}}$ $\boxed{\text{Hijo: 16 años}}$

Control 15 — Inecuaciones con una incógnita — 04 ABR 08

1. *Resuelve la inecuación:* $\dfrac{2\cdot(2x-3)}{9}-\dfrac{x+6}{3}-x\le\dfrac{5\cdot(3-x)}{6}-5$

2. *Resuelve la inecuación:* $2x^2\le -5x$

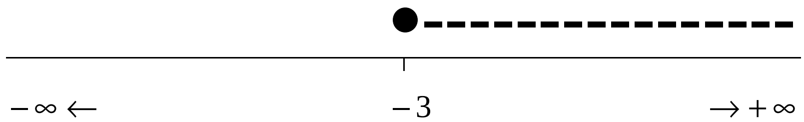
RESPUESTAS

1. $\dfrac{2\cdot(2x-3)}{9}-\dfrac{x+6}{3}-x\le\dfrac{5\cdot(3-x)}{6}-5 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{4x-6}{9}+\dfrac{-x-6}{3}-x\le\dfrac{15-5x}{6}-5 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \frac{18(4x-6)}{9}+\frac{18(-x-6)}{3}-18x\le\frac{18(15-5x)}{6}-18\cdot 5 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2(4x-6)+6(-x-6)-18x\le 3(15-5x)-90 \quad\Rightarrow\quad 8x-12-6x-36-18x\le 45-15x-90 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (8-6-18+15)x\le 45-90+12+36 \quad\Rightarrow\quad -x\le 3 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x\ge -3}\ \Rightarrow\ \boxed{S=[-3,+\infty)}$$



2. La inecuación $2x^2\le -5x \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+5x\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(2x+5)\le 0$

Los valores que anulan el primer miembro son:

$$x(2x+5)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \underline{\underline{x=0}} \\ 2x+5=0 \quad\Rightarrow 2x=-5 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=-2'5}} \end{cases}$$

Estos dos valores de x dividen al conjunto de los números reales en tres intervalos, analizamos el signo del valor numérico de $x(2x+5)$ en cada uno de ellos:

Signo de $x(2x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Valores de x	$-\infty\leftarrow$	$-2'5$		0	$\rightarrow+\infty$

$$\boxed{-2'5\ \le\ x\ \le\ 0}$$

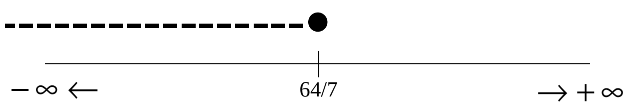
$$\boxed{S\ =\ [-2'5\ ,\ 0]}$$

Control 14 Inecuaciones de primer grado con una incógnita 28 MAR 08

Resuelve la inecuación:

$$1-\frac{2x-8}{21}+\frac{3x}{7}\geq x-\frac{x+5}{3}$$

RESLUCIÓN

Multiplicamos a los dos miembros por 21 que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, (al ser un número positivo se mantiene la desigualdad):	$21\cdot\left(1-\frac{2x-8}{21}+\frac{3x}{7}\right)\geq 21\cdot\left(x-\frac{x+5}{3}\right)$
De acuerdo con la propiedad distributiva, multiplicamos a cada sumando por 21:	$21\cdot 1-\frac{21\cdot(2x-8)}{21}+\frac{21\cdot 3x}{7}\geq 21\cdot x-\frac{21\cdot(x+5)}{3}$
Todas las fracciones se pueden simplificar ya que 21 es divisible por cada denominador :	$21-1\cdot(2x-8)+3\cdot 3x\geq 21x-7\cdot(x+5)$
Volvemos a aplicar la propiedad distributiva para quitar los paréntesis:	$21-2x+8+9x\geq 21x-7x-35$
Sumamos $(-21-8-21x+7x)$ a los dos miembros (para juntar los términos semejantes:	$-2x+9x-21x+7x\geq -35-21-8$
Sumamos los términos semejantes:	$-7x\geq -64$
Multiplicamos a los dos miembros por (-1) (al ser un número negativo, hay que invertir la desigualdad):	$7x\leq 64$
Multiplicamos a los dos miembros por $1/7$ (dividimos por 7), al ser un número positivo, se mantiene la desigualdad:	$\boxed{x\leq\frac{64}{7}}$
Gráficamente:	
Conjunto solución:	$\boxed{S=(-\infty\,,64/7]}$

Control 13 — Examen global de la 2ª evaluación — 07 MAR 08

EN TODOS LOS EJERCICIOS SIMPLIFICA LO MÁS POSIBLE TANTO LOS CÁLCULOS COMO LOS RESULTADOS

1. Halla el cociente y el resto de:

a) $(x^3 - 2x^2 + 13) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & 0 & 13 \\ -2 & & -2 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -3 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x + 8$
Resto: -3

b) $(4x^3 + 5x) : (2x + 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & & +5x & & 2x+1 \\ \cline{5-5} -4x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & +5x & & \\ & +2x^2 & +1x & & \\ \cline{2-3} & & +6x & & \\ & & -6x & -3 & \\ \cline{3-4} & & & -3 & \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - x + 3$
Resto: -3

2. Factoriza los polinomios:

a) $6x^2 + 7x - 5$

Raíces del polinomio:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 6\cdot(-5)}}{2\cdot 6} = \frac{-7 \pm 13}{12} = \begin{cases} \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-20}{12} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$6x^2 + 7x - 5 = 6\cdot(x - \frac{1}{2})\cdot(x + \frac{5}{3}) =$$
$$= \boxed{(2x-1)\cdot(3x+5)}$$

b) $18x^3 - 8x$

$$18x^3 - 8x =$$
$$= 2x\cdot(9x^2 - 4) =$$
$$= \boxed{2x\cdot(3x+2)\cdot(3x-2)}$$

3. Efectúa:

a) $(3x^2 - 2x + 1)^2 = *$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & 3x^2 & -2x & +1 \\ & & & 3x^2 & -2x & +1 \\ \cline{3-6} & & & 3x^2 & -2x & +1 \\ & & -6x^3 & +4x^2 & -2x & \\ & 9x^4 & -6x^3 & +3x^2 & & \\ \hline (*) & 9x^4 & -12x^3 & -10x^2 & -4x & +1 \end{array}$$

b) $\dfrac{x-3}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{2} \cdot \dfrac{2x-4}{x^2+4x+3} = (*)$

$$(*) = \frac{x-3}{(x+3)\cdot(x-3)} - \frac{(x+1)\cdot 2\cdot(x-2)}{2\cdot(x+1)\cdot(x+3)} =$$
$$= \frac{1}{x+3} - \frac{x-2}{x+3} = \boxed{\frac{-x+3}{x+3}}$$

4. Resuelve las ecuaciones:

$a)\quad 3x^3-2x+1=0$	$b)\quad (2x^2+3x)\cdot(4x^2-25)=0$
Factorizamos el primer miembro: $(x+1)\cdot(3x^2-3x+1)=0 \quad \Rightarrow$ Alguno de los dos factores tiene que valer 0 $\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & \Rightarrow \quad (I) \\ o & \\ 3x^2-3x+1=0 & \Rightarrow \quad (II) \end{cases}$ Resolvemos cada ecuación: $(I)\quad x=-1$ $(II)\quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}=\dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{6}\notin\Re$ La única solución es: $\boxed{x=-1}$	Alguno de los dos factores tiene que valer 0 $\Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3x=0 \Rightarrow (I) \\ o \\ 4x^2-25=0 \Rightarrow (II) \end{cases}$ Resolvemos cada una de las ecuaciones de segundo grado, ambas incompletas: (I) $x\cdot(2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 2x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$ (II) $4x^2=25 \Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4} \Rightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}$ Soluciones: $\boxed{x=0}$, $\boxed{x=\dfrac{-3}{2}}$, $\boxed{x=\dfrac{5}{2}}$, $\boxed{x=\dfrac{-5}{2}}$

5. Resuelve las ecuaciones:

$a)\quad \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4+x}{2}\right)\right]$	$b)\quad x-\sqrt{2x-3}=3$
$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4+x}{2}\right)\right]$ $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4+x}{12} \quad \xrightarrow{\cdot12}$ $2x-8=4x-4-x \quad \xrightarrow{+8-3x}$ $-x=4 \quad \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{x=-4}$ Comprobación: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-4-4}{3}=\dfrac{1}{3}\left[-4-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4+(-4)}{2}\right)\right]$ $\dfrac{-4}{3}=\dfrac{-4}{3}$ el resultado es correcto	$x-3=\sqrt{2x-3}$ $(x-3)^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2$ $x^2-6x+9=2x-3$ $x^2-8x+12=0$ $(x-2)\cdot(x-6)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ o \\ x=6 \end{cases}$ Comprobaciones: $x=2 \Rightarrow 2-\sqrt{2\cdot2-3}=3 \Rightarrow 1=3$ NO cumple $x=6 \Rightarrow 6-\sqrt{2\cdot6-3}=3 \Rightarrow 3=3$ S I cumple La única solución es: $\boxed{x=6}$

Control 12 Fracciones algebraicas y ecuaciones con una incógnita 29 FEB 08

1. Efectúa, simplificando lo más posible: $\dfrac{x+3}{x^2+x-6}-\dfrac{x+2}{x-1}:\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

2. Indica los pasos que hay que dar para simplificar una ecuación de primer grado y pasarla a su forma general, $Ax=B$, e indica el número de soluciones que tiene según los valores de A y B

RESPUESTAS

1. $$\frac{x+3}{x^2+x-6}-\frac{x+2}{x-1}:\frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x+3}{(x+3)\cdot(x-2)}-\frac{(x+2)}{(x-1)}\frac{(x+1)}{x(x+2)} = \frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{(x-1)x} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}-\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-x-(x^2-x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-x-x^2+x+2}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$\boxed{\frac{2}{x(x-1)(x-2)}} = \boxed{\frac{2}{x^3-3x^2+2x}}$$

2. Para simplificar una ecuación y pasarla a la forma $Ax=B$ hay que:

   - Quitar paréntesis.
   - Quitar denominadores.
   - Reducir términos semejantes.
   - Ordenarlos.

Nº de soluciones de $Ax=B$: $\begin{cases} Si \quad A\neq 0 & \Rightarrow \quad Una\_solución. \quad (I) \\ Si \quad A=0 \quad y \quad B\neq 0 & \Rightarrow \quad No\_tiene\_solución. \quad (II) \\ Si \quad A=0 \quad y \quad B=0 & \Rightarrow \quad Infinitas\_soluciones. \quad (III) \end{cases}$

(I) Ejemplo: $2x=16 \quad \Rightarrow \quad x=8$ (8 es el único número que multiplicado por 2 da 16).

(II) Ejemplo: $0x=7$ No tiene solución (ningún valor multiplicado por 0 da 7).

(III) $0x=0$ Cualquier número multiplicado por 0 da 0. Se trata de una Identidad.

Control 11 Segundo examen de repaso de la 1ª evaluación 15 FEB 08

1. *Expresa el número 2 como potencia de base 7 justificando la respuesta y redondeado el exponente en las millonésimas.*

$$2 \underset{(1)}{=} 7^{\log_7 2} \underset{(2)}{=} 7^{\frac{\log 2}{\log 7}} \underset{(3)}{=} \boxed{7^{0'356207}}$$

(1) Por definición de logaritmo.
(2) Cambio de base para utilizar la calculadora.
(3) Redondeando el exponente en las millonésimas.

2. *Si* $\log_a P = \frac{2}{3}$, $\log_a Q = \frac{-1}{3}$ *halla razonadamente el valor de* $\log_a \left(P^4 \cdot a^3 : Q\right)$.

$$\log_a \left(P^4 \cdot a^3 : Q\right) = \log_a P^4 + \log_a a^3 - \log_a Q = 4 \cdot \log_a P + 3 \cdot \log_a a - \log_a Q =$$
$$= 4 \cdot \frac{2}{3} + 3 - \frac{-1}{3} = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$$

3. *Expresa en notación científica, con tres cifras significativas, el error relativo que se comete al considerar que el valor de* π *es 3'14. Justifica la respuesta.*

$$\text{Error relativo} = \frac{Error\_absoluto}{Valor\_real} = \frac{|\pi - 3'14|}{\pi} = 0'000\underline{506}957\ldots = \boxed{5'07 \cdot 10^{-4}}$$

4. *Definiciones de raíz, de radical y de radicando y utiliza la* "raíz cuarta de dieciséis" *como ejemplo para relacionar los tres conceptos entre sí.*

La raíz n-ésima de un número A es otro número x que elevado a n da A, por lo tanto: $\sqrt[n]{A} = x \iff x^n = A$

El radical , $\sqrt[n]{A}$, es la expresión indicada de la raíz.

El radicando, A, es el número al que se calcula la raíz.

"raíz cuarta de dieciséis"
$\sqrt[4]{16} = 2$ porque $(2)^4 = 16$

Raíz	Radical	Radicando
2	$\sqrt[4]{16}$	16

5. *Halla la fracción irreducible generatriz de: a) 1'02500 ; b)* $5'0\overline{52}$

$$a)\ 1'02500 = 1'025 = \frac{1025}{1000} = \boxed{\frac{41}{40}} \qquad b)\ 5'0\overline{52} = \frac{5052-50}{990} = \frac{5002}{990} = \boxed{\frac{2501}{495}}$$

6. *Si llevas recorridos 15% de los 5/6 de un camino ¿qué fracción del camino te queda por recorrer? Razona las respuesta.*

15% de $\frac{5}{6} = \frac{15}{100} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{8}$ del camino llevo recorrido, por lo tanto,

$\boxed{\text{Me queda por recorrer } \frac{7}{8} \text{ del camino.}}$

7. *Expresa en una sola potencia de base irreducible y exponente positivo:* $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^7\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)}}$

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^7\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)}} = \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{[3+(-1)]\cdot(-2)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-7+2\cdot\frac{1}{5}}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-33}{5}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4-\frac{-33}{5}} = \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{13}{5}}}$$

8. *Extrae todos los factores posibles de:* $\sqrt[3]{\dfrac{54\cdot a^{14}c^7}{8\cdot b^6}}$

$$\sqrt[3]{\frac{54\cdot a^{14}c^7}{8\cdot b^6}} = \sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 2\cdot a^{12}\cdot a^2\cdot c^6\cdot c}{2^3\cdot b^6}} = \boxed{\frac{3\cdot a^4\cdot c^2}{2\cdot b^2}\cdot\sqrt[3]{2\cdot a^2\cdot c}}$$

9. *Simplifica lo más posible:* $\sqrt{18}-\sqrt[4]{64}$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}\\ \sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{8^2}=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}\end{array}\right\}\sqrt{18}-\sqrt[4]{64}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\boxed{\sqrt{2}}$$

10. *Racionaliza y simplifica:* $\dfrac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}\left(3\sqrt{5}-5\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-5\sqrt{3}\right)} = \frac{15\sqrt{15}-75}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15\sqrt{15}-75}{45-75} = \frac{15(\sqrt{15}-5)}{-30} =$$

$$=\frac{\sqrt{15}-5}{-2} = \boxed{\frac{5-\sqrt{15}}{2}}$$

Control 10 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS 08 FEB 08

Factoriza lo más posible los siguientes polinomios:

1º) $\boxed{10x^3-2x^2}$ 2º) $\boxed{9x^2-12x+4}$ 3º) $\boxed{4x^3-9x}$ 4º) $\boxed{x^2-2x-35}$

5º) $\boxed{5x^3-15x+10}$ 6º) $\boxed{20x^3+26x^2-6x}$ 7º) $\boxed{-20x^2+5}$ 8º) $\boxed{8x^2+2x+3}$

9º) $\boxed{12x^4-38x^3+16x^2+10x}$ 10º) $\boxed{16x^4-8x^2+1}$

RESPUESTAS

1º) $10x^3-2x^2=\boxed{2x^2(5x-1)}$

2º) $9x^2-12x+4=\boxed{(3x-2)^2}$

3º) $4x^3-9x=x(4x^2-9)=\boxed{x(2x+3)(2x-3)}$

4º) $x^2-2x-35=\boxed{(x+5)(x-7)}$

5º) $5x^3-15x+10=5(x^3-3x+2)=5(x-1)(x^2+x-2)=\boxed{5(x-1)^2(x+2)}$

6º) $20x^3+26x^2-6x=2x(10x^2+13x-3)=2x\cdot 10(x-\frac{1}{5})(x+\frac{3}{2})=\boxed{2x(5x-1)(2x+3)}$

7º) $-20x^2+5=-5(4x^2-1)=\boxed{-5(2x+1)(2x-1)}$

8º) $8x^2+2x+3=\boxed{\textit{Irreducible}}$ (No se puede factorizar porque no tiene raíces reales)

9º) $12x^4-38x^3+16x^2+10x=2x(6x^3-19x^2+8x+5)=2x(x-1)(6x^2-13x-5)=$

$=2x(x-1)\cdot 6(x+\frac{1}{3})(x-\frac{5}{2})=\boxed{2x(x-1)(3x+1)(2x-5)}$

10º) $16x^4-8x^2+1=(4x^2-1)^2=[(2x+1)(2x-1)]^2=\boxed{(2x+1)^2(2x-1)^2}$

Control 9 Operaciones con polinomios 18 ENE 08

1. *Dados los polinomios:*

$$P(x) = x^5 + x + 2x^3 - 2x^5 + \frac{1}{3}x^2 - 2 + 3x + x^5 - \frac{4}{3}x^2 + 5$$

$$Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$R(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$$

Halla el polinomio resultante de $3P(x) - 12Q(x) \cdot R(x)$. (5 puntos)

RESPUESTA

Empezamos simplificando el polinomio P(x) para lo cual sumamos sus términos semejantes

$$P(x) = x^5 + x + 2x^3 - 2x^5 + \frac{1}{3}x^2 - 2 + 3x + x^5 - \frac{4}{3}x^2 + 5 = \quad = (1-2+1)x^5 + 2x^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)x^2 + (1+3)x - 2 + 5 = 2x^3 - x^2 + 4x + 3$$

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 3$$

Para hallar $3P(x) - 12Q(x) \cdot R(x)$ efectuamos primero los productos y luego la resta:

1º→ 3 · P(x)

2º→ 12 · Q(x)

3º→ 12Q(x) · R(x)

4º→ 3P(x) – 12Q(x)·R(x)

1º → $3P(x) = 3\cdot(2x^3 - x^2 + 4x + 3) = 6x^3 - 3x^2 + 12x + 9$

2º → $12Q(x) = 12\cdot\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}\right) = 4x^3 + 9x - 10$

3º →

12Q(x) =				$4x^3$		$+ 9x$	$- 10$
R(x) =				$3x^3$	$- 2x^2$	$+ x$	
			$4x^4$		$+ 9x^2$	$- 10x$	
		$- 8x^5$		$- 18x^3$	$+ 20x^2$		
	$12x^6$		$+ 27x^4$	$- 30x^3$			
12Q(x) · R(x) =	$12x^6$	$- 8x^5$	$+ 31x^4$	$- 48x^3$	$+ 29x^2$	$- 10x$	

4º →

$$\begin{array}{rccccccc}
3P(x) = & & & & 6x^3 & -3x^2 & +12x & +9 \\
-12Q(x)\cdot R(x) = & -12x^6 & +8x^5 & -31x^4 & +48x^3 & -29x^2 & +10x & \\
\hline
3P(x)-12Q(x)\cdot R(x) = & -12x^6 & +8x^5 & -31x^4 & +54x^3 & -32x^2 & +22x & +9
\end{array}$$

$$\boxed{3P(x)-12Q(x)\cdot R(x) = -12x^6+8x^5-31x^4+54x^3-32x^2+22x+9}$$

2. *Dados los polinomios:*

$$S(x) = 5x^4 - 10x^3 + 8x - 7 \quad y \quad T(x) = x^2 - 1$$

a) Halla S(-2) (1 punto); *b)* $S\left(\frac{1}{2}\right)$ (1 punto); *c) Efectúa la división de S(x) entre T(x)* (3 puntos)

RESPUESTAS

a) $S(-2) = 5(-2)^4 - 10(-2)^3 + 8(-2) - 7 = 5\cdot 16 - 10\cdot(-8) - 16 - 7 = 80 + 80 - 23 = \boxed{137}$

b) $S\left(\frac{1}{2}\right) = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\cdot\frac{1}{2} - 7 = \frac{5}{16} - \frac{5}{4} + \underline{4-7} = \frac{5}{16} - \frac{20}{16} - \frac{48}{16} = \boxed{-\frac{63}{16}}$

c)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & -10x^3 & & +8x & -7 & x^2 \quad -1 \\
\cline{6-6}
-5x^4 & & +5x^2 & & & 5x^2 \quad -10x \quad +5 \\
\cline{1-3}
& -10x^3 & +5x^2 & +8x & -7 & \\
& +10x^3 & & -10x & & \\
\cline{2-4}
& & 5x^2 & -2x & -7 & \\
& & -5x^2 & & +5 & \\
\cline{3-5}
& & & -2x & -2 &
\end{array}$$

$$\boxed{\frac{5x^4-10x^3+8x-7}{x^2-1} = 5x^2-10x+5 + \frac{-2x-2}{x^2-1}}$$

Control 8 — Examen de repaso de la 1ª evaluación — 11 ENE 08

11. *Expresa el número 3 como potencia de base 15 justificando la respuesta y redondeado el exponente en las millonésimas.*

$$3 \underset{(1)}{=} 15^{\log_{15} 3} \underset{(2)}{=} 15^{\frac{\log 3}{\log 15}} \underset{(3)}{=} \boxed{15^{0'405684}}$$

(1) Por definición de logaritmo.
(3) Cambio de base para utilizar la calculadora.
(3) Redondeando el exponente en las millonésimas.

12. *Si* $\log_a P = 3$, $\log_a Q = 6$ *halla razonadamente el valor de* $\log_a \frac{\sqrt[3]{Q}}{P^2}$.

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{Q}}{P^2} = \log_a Q^{\frac{1}{3}} - \log_a P^2 = \frac{1}{3}\log_a Q - 2\cdot\log_a P = \frac{1}{3}\cdot 6 - 2\cdot 3 = 2 - 6 = \boxed{-4}$$

13. *Expresa en notación científica, con cuatro cifras significativas, el error relativo que se comete al considerar que el valor de* $\sqrt[5]{3}$ *es 1'25. Justifica la respuesta.*

$$\text{Error relativo} = \frac{Error\_absoluto}{Valor\_real} = \frac{\left|\sqrt[5]{3} - 1'25\right|}{\sqrt[5]{3}} = 0'00\underline{3426}95\ldots = \boxed{3'427\cdot 10^{-3}}$$

14. *Definiciones de raíz, de radical y de radicando y utiliza la raíz cúbica de menos ocho como ejemplo para relacionar los tres conceptos entre sí.*

La raíz n-ésima de un número A es otro número x que elevado a n da A, por lo tanto: $\sqrt[n]{A} = x \iff x^n = A$

El radical , $\sqrt[n]{A}$, es la expresión indicada de la raíz.

El radicando, A, es el número al que se calcula la raíz.

La raíz cúbica de menos ocho
$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

Raíz	Radical	Radicando
-2	$\sqrt[3]{-8}$	-8

15. *Sin utilizar la calculadora halla el valor exacto de:* $180 + 0'20 \cdot 0'8\overline{3} - 0'\overline{9} : 0'00\overline{5}$

$$0'20 = 0'2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$0'8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

$$0'\overline{9} = 1$$

$$0'00\overline{5} = \frac{5}{900} = \frac{1}{180}$$

$$180 + 0'20 \cdot 0'8\overline{3} - 0'\overline{9} : 0'00\overline{5} =$$

$$= 180 + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6} - 1 : \frac{1}{180} =$$

$$= 180 + \frac{1}{6} - 180 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}}$$

16. Si llevas recorridos 3/4 de los 5/6 de un camino, a) ¿Qué fracción del camino te queda por recorrer? b) Si el camino tiene 800 metros ¿cuántos metros llevas recorridos? Razona las respuestas.

a) Llevo recorrido: $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{8}$, es decir, $\boxed{\text{quedan por recorrer } \frac{3}{8} \text{ del camino.}}$

b) $\frac{5}{8}$ del camino $= \frac{5}{8}$ de 800 metros $= (800 : 8)\cdot 5 = 100\cdot 5 =$ $\boxed{\text{500 metros llevo recorridos.}}$

17. Expresa en una sola potencia de exponente positivo: $\dfrac{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3\left(\frac{3}{5}\right)^0}{\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}}$

$$\frac{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3\left(\frac{3}{5}\right)^0}{\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3\cdot 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{15}{2}}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

18. Extrae todos los factores posibles de: $\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot a^{10}}{27\cdot b^6}}$

$$\sqrt[3]{\frac{8\cdot a^{10}}{27\cdot b^6}} = \frac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{a^{10}}}{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{b^6}} \overset{*}{=} \boxed{\frac{2\cdot a^3\cdot\sqrt[3]{a}}{3\cdot b^2}}$$

$* \ \sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9\cdot a} = \sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a} = a^3\cdot\sqrt[3]{a}$

19. Expresa en un solo radical: $\sqrt{27} - \sqrt[4]{9} + \sqrt{75}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$; $\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{27} - \sqrt[4]{9} + \sqrt{75} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (3 - 1 + 5)\sqrt{3} = \boxed{7\sqrt{3}} = \sqrt{7^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{7^2\cdot 3} = \boxed{\sqrt{147}}$

20. Racionaliza y simplifica: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}+6}{3^2-\sqrt{3}^2} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{6} = \boxed{\sqrt{3}+1}$$

Control 7 Examen de la 1ª evaluación 05 DIC 07

21. Halla el polinomio resultante de desarrollar $(x – 1)^4$.

$$(x-1)^4 = [x + (-1)]^4 = \binom{4}{0}\cdot x^4\cdot(-1)^0 + \binom{4}{1}\cdot x^3\cdot(-1)^1 + \binom{4}{2}\cdot x^2\cdot(-1)^2 + \binom{4}{3}\cdot x^1\cdot(-1)^3 + \binom{4}{4}\cdot x^0\cdot(-1)^4 =$$

$$= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot 1 + 4 \cdot x \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$$

22. Sin utilizar la calculadora halla el valor de $\binom{21}{3}$.

$$\binom{21}{3} = \frac{21!}{3!\cdot 18!} = \frac{18!\cdot 19\cdot 20\cdot 21}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 18!} = \frac{18!}{18!}\,\frac{19}{1}\,\frac{20}{2}\,\frac{21}{3} = 19 \cdot 10 \cdot 7 = \boxed{1330}$$

23. Expresa en notación científica, con tres cifras significativas, el error relativo que se comete al tomar 4’67 como valor de $\frac{14}{3}$.

$$Error\ relativo = \frac{Error\_absoluto}{Valor\_real} = \frac{\left|4'67 - \frac{14}{3}\right|}{\frac{14}{3}} = 0'000714285\ldots = \boxed{7'14 \cdot 10^{-4}}$$

24. Explica como obtener un segmento que mida exactamente $\sqrt{51}$ cm.

Puesto que $51 = 5^2 + 5^2 + 1^2$ si dibujamos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 cm, su hipotenusa medirá $\sqrt{50}$ cm como podemos comprobar con el teorema de Pitágoras

$$(Hipotenusa)^2 = (Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2 \Rightarrow$$

$$Hipotenusa = \sqrt{(Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2}$$

$$Hipotenusa = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}\ \text{cm}$$

Si dibujamos otro triángulo rectángulo que tenga un cateto de $\sqrt{50}$ cm y el otro de 1 cm, la hipotenusa medirá exactamente $\sqrt{(\sqrt{50})^2 + 1^2} = \sqrt{51}$ cm

25. Halla la fracción generatriz irreducible de los números: a) 1’234; b) $1'\overline{234}$ y c) $1'2\overline{34}$

$$a)\ 1'234 = \frac{1234}{1000} = \boxed{\frac{617}{500}} \qquad b)\ 1'\overline{234} = \frac{1234-1}{999} = \frac{1233}{999} = \boxed{\frac{137}{111}}$$

$$c)\ 1'2\overline{34} = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \boxed{\frac{611}{495}}$$

26. Halla la fracción irreducible resultante de: $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}+1}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right):\frac{3}{2}}$

Numerador: $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}+1 = \frac{1}{2}-\frac{5}{4}+1=\frac{2}{4}-\frac{5}{4}+\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$

Denominador: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right):\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{10}{4}\right)\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-7}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{-7}{12}$

Por lo tanto: $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}+1}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right):\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{-7}{12}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-12}{7} = \boxed{\frac{-3}{7}}$

27. Expresa en una sola potencia de exponente positivo: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^5}$

$$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^5} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^9}{\left(\frac{2}{3}\right)^{20}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}}$$

28. Expresa en un solo radical: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9} = \boxed{\sqrt[6]{72}}$$

29. Expresa en un solo radical: $\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

$$\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50} = \sqrt{4\cdot2}-\sqrt{9\cdot2}+\sqrt{25\cdot2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

30. Racionaliza y simplifica: $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2\cdot3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

Control 6 NÚMEROS REALES 16 NOV 07

1. *Haz un esquema de la clasificación de los números reales y di, justificando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*
   - *Todo número decimal es racional.*
   - *Hay números fraccionarios que son irracionales.*
   - *Todos los números positivos son naturales.*

2. *Ángel y Blas son dos gemelos idénticos que pesan exactamente lo mismo. Se han pesado en dos básculas distintas y la de Ángel marcaba 67'100 kg y la de Blas 67'500 kg. Curiosamente las dos básculas cometen el mismo error.*
   a) *Explica cómo es posible y justifica cuál es el peso real de los gemelos y el error que han cometido las básculas.*
   b) *¿Cuál es el error relativo, en notación científica con tres cifras significativas, que cometen las básculas y cuánto dirían que pesa un kg cada una de ellas?*

RESPUESTAS

1. Clasificación de los números reales:

$$\text{Reales}\left\{\begin{array}{l}\text{Racionales}\left\{\begin{array}{l}\text{Enteros}\left\{\begin{array}{l}\text{Naturales}\\ 0\\ \text{Enteros negativos}\end{array}\right.\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right.\\ \text{Irracionales}\end{array}\right.$$

- *Todo número decimal es racional.* FALSO.

  Solo son <u>racionales</u> los decimales limitados y los ilimitados periódicos que son los que pueden expresarse como <u>razones</u> de números enteros. Los números con infinitas cifras decimales no periódicos, son irracionales (no-racionales), por ejemplo: π, $\sqrt{2}$ …

- *Hay números fraccionarios que son irracionales.* FALSO.

  Como se ve en el esquema de la clasificación de los números reales, los números fraccionarios son racionales.

- *Todos los números positivos son naturales.* FALSO.

  Para que un número sea natural, además de positivo, tiene que ser entero. Por ejemplo los números 0'5, 2/3… son positivos y no son naturales.

2. a) El error que cometen las básculas es <u>*el valor absoluto*</u> de la diferencia entre el peso real y el que marcan y, lógicamente, si este valor absoluto es el mismo en ambas es porque la de Ángel marca de menos (<u>*error por defecto*</u>) en la misma medida que la de Blas marca de más (<u>*error*</u>

por exceso). Por lo tanto el valor del peso real de los hermanos tiene que ser el que queda en el medio (*media aritmética*) de los que han marcado las básculas:

$$\frac{67'100 + 67'500}{2} = 67'300$$

$\boxed{\text{Ángel y Blas pesan, cada uno, } 67'300 \text{ kg}}$

Error absoluto: $|67'300 - 67'100| = |67'300 - 67'500| = 0'200$

En ambos casos la diferencia, en valor absoluto, entre el peso real y el que han marcado las básculas es de 0'200 kg = 200 gr.

El error que cometen las básculas es de 200 gr (la de Ángel por defecto y la de Blas por exceso)

b) El error relativo expresa el error cometido por cada unidad (kilogramo en este caso) medida, por lo tanto se obtiene dividiendo el error que se ha cometido, 0'200 kg entre el número de kilogramos medidos, 67'300 kg

$$\underline{\text{Error relativo}} = \frac{0'200kg}{67'300kg} = 0'00297\,|1768 = \underline{2'97 \cdot 10^{-3}}$$

Esta cantidad es lo que, en cada kilogramo, la báscula de Ángel marca de menos y la de Blas marca de más, por lo tanto, lo que dirían que pesa un kilogramo es:

La de Ángel: $1 - 0'00297 = 0'99703$ kg
La de Blas: $1 + 0'00297 = 1'00297$ kg

Control 5 — 2º EXAMEN de REPASO de la PREEVALUACION — 09 NOV 07

1. Completa la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

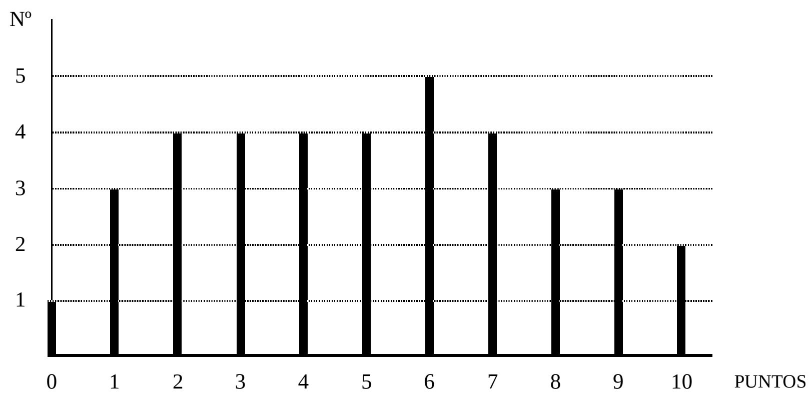
x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
[200 , 250)	2			
[250 , 300)		15		
[300 , 350)			0’30	
[350 , 400)				0’78
[400 , 450)			0’14	
[450 , 500)		50		1

2. Coeficiente de correlación de Pearson: ¿Cómo se calcula? ¿Entre qué valores está comprendido? ¿Qué nos indica su signo? ¿Qué indica su valor absoluto?

3. Sin utilizar la calculadora, halla el término 29º del polinomio resultante de efectuar la potencia $(2x + a)^{30}$.

4. Se quieren hacer códigos para etiquetar los artículos de una tienda. Para cada código se utilizarán tres vocales puestas una a continuación de otra. ¿Cuántos de estos códigos empezarán por A y tendrán las vocales en orden alfabético? Haz el diagrama de árbol correspondiente para obtener la solución.

5. Los miembros de un jurado han valorado una película. La gráfica adjunta corresponde a las puntuaciones que dieron. Halla, razonadamente, la moda, la mediana y la media. Define dichos parámetros e indica lo que representan en este caso.



RESPUESTAS

1. Para completar la tabla tendremos en cuenta lo que representa cada columna:
   - x_i Valores que toma la variable, está dado por intervalos.
   - n_i Frecuencia absoluta (número de valores x_i) correspondiente a cada intervalo.
   - N_i Frecuencias absolutas acumuladas. $N_i = N_{i-1} + n_i$. El último valor de esta columna nos indica que en la muestra estudiada hay 50 individuos.
   - f_i Frecuencia relativa, por lo tanto $f_i = n_i/50 \;\Rightarrow\; n_i = f_i \cdot 50$
   - F_i Frecuencia relativa acumulada, por lo tanto $F_i = N_i/50$ y también, $F_i = F_{i-1} + f_i$

Cálculos:

$$f_1 = 2/50 = 0'04$$

$$2 + n_2 = 15 \quad\Rightarrow\quad n_2 = 15 - 2 = 13$$

$$0'30 = n_3/50 \Rightarrow n_3 = 0'30 \cdot 50 = 15$$

$$0'78 = 0'60 + f_4 \Rightarrow f_4 = 0'18\;;\; n_4 = 0'18 \cdot 50 = 9$$

$$n_5 = 0'14 \cdot 50 = 7$$

$$n_6 = 50 - 46 = 4$$

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
[200 , 250)	$n_1 = 2$	2	0’04	0’04
[250 , 300)	13	$N_2 = 15$	0’26	0’30
[300 , 350)	15	30	$f_3 = 0'30$	0’60
[350 , 400)	9	39	0’18	$F_4 = 0'78$
[400 , 450)	7	46	$f_5 = 0'14$	0,92
[450 , 500)	4	$N_6 = 50$	0’08	$F_6 = 1$

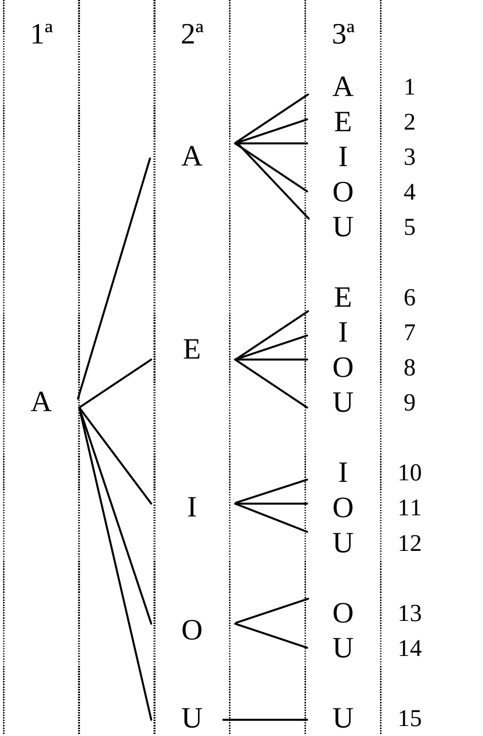
2. El coeficiente de correlación de Pearson, r, se calcula dividiendo la covarianza, σ_{xy}, entre el producto de las desviaciones típicas, $\sigma_x \cdot \sigma_y$, de las dos variables. Su valor está comprendido entre -1 y $+1$. Si r es negativo significa que la correlación es negativa, es decir, al aumentar los valores de x los correspondientes de y disminuyen. Cuánto menor sea el valor absoluto de r, esto es, cuanto más próximo esté a 0, menor es la correlación lineal entre las variables y, cuánto mayor es su valor absoluto, mayor es su correlación de tal manera que si $r = \pm 1$, entre x e y existe una dependencia funcional.

3. El término 29º del desarrollo de $(2x + a)^{30}$ es:

$$T_{29} = \binom{30}{28} \cdot (2x)^2 \cdot a^{28} = {}^*435 \cdot 4x^2 \cdot a^{28} = \boxed{1740 \cdot x^2 \cdot a^{28}}$$

$$^*\binom{30}{28} = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{\cancel{28!} \cdot 29 \cdot 30}{\cancel{28!} \cdot 1 \cdot 2} = 29 \cdot 15 = 435$$

4.



Se pueden hacer 15 códigos, de tres vocales en orden alfabético, que empiecen por A.

5. Las alturas de las barras del diagrama nos dan las frecuencias correspondientes a cada puntuación **.

- Moda. Valor de la variable con mayor frecuencia. En este caso ***Mo = 6*** que nos indica que la puntuación que más críticos han dado a la película fue 6 puntos.
- Mediana. Valor de la variable que ocupa la posición central en un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. En este caso la mediana es ***Me = 5*** ya que, al ser 37 el número de datos, el central será el 19º que, como se ve por las frecuencias acumuladas, se trata de un 5. La mitad de los críticos han valorado la película con 5 o menos puntos y la otra mitad con 5 o más.
- Media. Valor que resulta de sumar todos los datos y dividirlo por el número de ellos, por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + \ldots + 10 \cdot 2}{37} = \frac{188}{37} = \underline{\mathbf{5'08}}$$

que son los puntos que corresponderían a cada crítico si el total que han dado entre todos, 188, se distribuyesen a partes iguales entre ellos.

**

Puntuaciones, x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta, n_i	1	3	4	4	4	4	5	4	3	3	2
Frec. abs. Acumulada, N_i	1	4	8	12	16	20	25	29	32	35	37

$N = \sum n_i = 37$

$N_5 < 19$ | $N_6 > 19$

Control 4 EXAMEN DE REPASO DE LA PREEVALUACION 26 OCT 07

1. *Se ha observado la duración, expresada en horas, de 400 bombillas de una determinada marca. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:*

Duración (horas)	*[120 , 130)*	*[130 , 140)*	*[140 , 150)*	*[150 , 160)*	*[160 , 170)*	*[170 , 180)*
Nº de bombillas	*52*	*60*	*65*	*83*	*94*	*46*

   a) *Halla, por interpolación lineal, la mediana e indica su significado en este caso. (2 puntos).*

   b) *Halla e interpreta el valor de la desviación media. (2 puntos).*

2. *Los coeficientes de correlación lineal de Pearson correspondientes a tres variables bidimensionales distintas: (X_A , Y_A), (X_B , Y_B) y (X_C , Y_C) valen: $r_A = 0'93$, $r_B = 0,05$ y $r_C = -1$, respectivamente. Explica, para cada caso, cuál es el tipo de relación existente entre las variables X e Y y cómo serán sus diagramas de dispersión correspondientes. (2 puntos).*

3. *Halla el polinomio resultante de efectuar la potencia $(x + 2)^5$. (2 puntos).*

4. *Halla razonadamente de cuántas maneras pueden colocarse 2 anillas idénticas en los dedos de una mano. Haz el diagrama de árbol correspondiente para averiguarlo. (2 puntos).*

RESPUESTAS

1 a) Cálculo de la mediana:

Horas de duración	c_i	n_i	N_i
[120 , 130)	125	52	52
[130 , 140)	135	60	112
[140 , 150)	145	65	177
[150 , 160)	155	83	260
[160 , 170)	165	94	354
[170 , 180)	175	46	400

FALTA INSERTAR
LA GRÁFICA

Para hallar la mediana lo primero que hacemos es averiguar en qué intervalo se encuentra. Vemos, por las frecuencias acumuladas, que hay 177 bombillas que han durado menos de 150 h y 260 que duraron menos de 160 h. Pretendemos averiguar, qué duración sería la que ocupa la posición 200 si las pusiéramos en orden creciente.

$$x_A = 150 \Rightarrow y_A = 177$$

$$x_B = 160 \Rightarrow y_B = 260$$

$$x_C = Me \Rightarrow y_c = 200$$

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{23}{x} = \frac{83}{10} \quad \Rightarrow \quad 83x = 230 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{230}{83} = 2'77$$

Por lo tanto Me = 150 + 2'77 = 152'77

La mediana es 152'77 horas.

Significa que 200 bombillas tuvieron una duración menor o igual a ese tiempo y otras 200 mayor o igual.

b) Cálculo de la desviación media:

La desviación media (d_m) es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos (en este caso las duraciones de las bombillas) respecto a su media aritmética. Como en este caso los datos están agrupados en intervalos, tomaremos como valor de los mismos, las marcas de clase, es decir, los valores centrales de cada intervalo.

x_i	n_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
125	52	26'125
135	60	16'125
145	65	6'125
155	83	3'875
165	94	13'875
175	46	23'875

Necesitamos la duración media de las bombillas $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} =$

$$= \frac{125\cdot52 + 135\cdot60 + 145\cdot65 + 155\cdot83 + 165\cdot94 + 175\cdot46}{400} = 151'125$$

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| x_i - \bar{x} \right|}{N} = \frac{26'125\cdot52 + 16'125\cdot60 + 6'125\cdot65 + 3'875\cdot83 + 13'875\cdot94 + 23'875\cdot46}{400} = 13'62$$

La desviación media es de 13'62 horas.

Significa que 13'62 horas es la media de lo que se han desviado las duraciones de las bombillas respecto a 151'125 horas que es la duración media.

2. Coeficiente de correlación lineal de Pearson

r_A = 0'93 Valor próximo a 1, lo que significa correlación lineal fuerte y positiva, es decir al aumentar los valores de X_A también lo hacen los de Y_A. Los puntos del diagrama de dispersión se distribuyen muy próximos a una recta.

r_B = 0,05 Valor próximo a 0. No existe correlación lineal entre las dos variables X_B e Y_B. Los puntos del diagrama no se distribuyen en torno a una recta sino que están dispersos en el plano.

$r_C = -1$ Dependencia funcional negativa, al aumentar X_C, disminuye Y_C. Los puntos del diagrama de dispersión pertenecen todos a una recta.

3. Binomio de Newton:

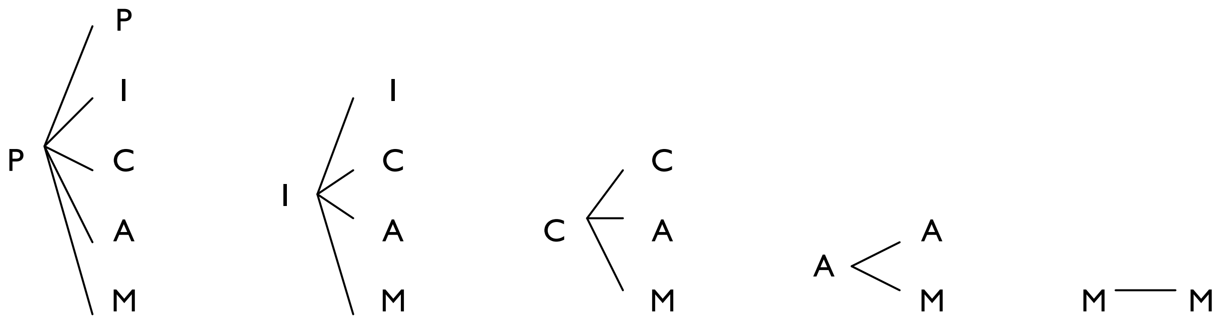
$$(x+2)^5 = \binom{5}{0}\cdot x^5\cdot 2^0 + \binom{5}{1}\cdot x^4\cdot 2^1 + \binom{5}{2}\cdot x^3\cdot 2^2 + \binom{5}{3}\cdot x^2\cdot 2^3 + \binom{5}{4}\cdot x^1\cdot 2^4 + \binom{5}{5}\cdot x^0\cdot 2^5 =$$

$$= 1 \cdot x^5 \cdot 1 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + 10 \cdot x^3 \cdot 4 + 10 \cdot x^2 \cdot 8 + 5 \cdot x \cdot 16 + 1 \cdot 1 \cdot 32 =$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\boxed{(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32}$$

4. Diagrama de árbol:



P, I, C, A y M representan a los dedos pulgar, índice, corazón, anular y meñique, respectivamente, que son los dedos en los que se colocarán las anillas. Por ejemplo, P-M representa que una anilla está en el pulgar y la otra en meñique y, como las anillas son iguales, esto sería lo mismo que decir M – P por lo tanto:

> Dos anillas iguales se pueden colocar en los dedos de una mano de
>
> 15 formas distintas

CONTROL 3 19 OCT 07

1. *¿Cuál es el valor del coeficiente del término 4º del desarrollo de $(x+y)^{15}$? ¿Qué otro término tiene el mismo coeficiente? Escribe ambos términos.*
2. *Escribe la fórmula del coeficiente de Pearson, indicando y definiendo lo que representa cada uno de los parámetros que aparecen en ella.*

RESPUESTAS

1. El coeficiente del término 4º del desarrollo de $(x + y)^{15}$ es:

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$$

El término que tiene el mismo coeficiente es el 4º empezando por el final que es el 13º puesto que el desarrollo de $(x + y)^{15}$ tiene 16 términos

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!\cdot 3!} = 455$$

Los términos son:

$$T_{4^o} = 455\, x^{12} y^3 \quad \text{y} \quad T_{13^o} = 455\, x^3 y^{12}$$

2. El coeficiente de correlación lineal de Pearson es:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

σ_{xy} representa la covarianza que es la media aritmética de los productos de las desviaciones de cada par de valores, x y, respecto de sus medias aritméticas o, lo que es lo mismo, la media de los productos de cada par de valores x y menos el producto de sus medias es decir:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

σ_x y σ_y representan las desviaciones típicas de x e y, respectivamente, es decir: las raíces cuadradas positivas de las varianzas, siendo la varianza la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, de x o de y, respecto a su media aritmética o, lo que es lo mismo, la media aritmética de los cuadrados de cada variable menos el cuadrado de su media:

La varianza de x es $(\sigma_x)^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2}{N} - (\bar{x})^2$

Y la desviación típica, σ_x, es la raíz cuadrada de la varianza (para σ_y sería todo igual pero cambiando x por y)

CONTROL 2 / ESTADÍSTICA / 5 OCT 07

Se ha pesado y medido a los diez componentes de un equipo y el resultado ha sido el siguiente:

	María	*Carmen*	*Pedro*	*Carlos*	*Luisa*	*Antonio*	*Olga*	*Pepa*	*Fran*	*Julio*	*MEDIA*
X: Peso (kg)	58	55	74	62	61	79	58	67	83	66	$\bar{x}$ = 66'3
Y: Estatura (cm)	168	160	180	175	170	180	165	171	182	175	$\bar{y}$ = 172'6

1. *Halla los coeficientes de variación correspondientes al peso y a la estatura e interpreta y compara las dispersiones de las variables por los valores obtenidos.*
2. *Dibuja el diagrama de dispersión e interpreta el tipo de correlación (grado, sentido y tipo) que existe entre el peso y la estura de estas personas. (Nota en el eje X, toma 2cm = 5 kg de peso y en el eje Y, toma 2 cm = 5 cm de estatura).*
3. *Halla el coeficiente de correlación lineal de Pearson e indica la relación entre el valor obtenido y el diagrama de dispersión.*

RESPUESTAS

1. El Coeficiente de variación es el cociente entre la desviación típica y la media

Variable →	X: Peso (kg)	Y: Estatura (cm)
Media →	$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ = 66'3 kg	$\bar{y} = \dfrac{\sum y_i}{N}$ = 172'6 cm
Desviación típica →	$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$ = 9'01kg	$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2}$ = 6'76 cm
Coef.de variación →	$CV_x = \dfrac{\sigma_x}{\bar{x}} = \dfrac{9'01}{66'3}$ = 0'1359 (13'59%)	$CV_y = \dfrac{\sigma_y}{\bar{y}} = \dfrac{6'76}{172'6}$ = 0'0392 (3'92%)

Como se ve por los coeficientes de variación los pesos están mucho más dispersos que las estaturas. La desviación típica de los pesos es el 13'59% del peso medio mientras que la desviación típica de las estaturas es, sólo, el 3'92% de la estatura media.

2. Si hacemos el diagrama de dispersión (nube de puntos) comprobaremos que se trata de una correlación lineal, positiva y fuerte.

FALTA INSERTAR LA GRÁFICA

3. Para obtener el coeficiente de Pearson, necesitamos la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 11498'7 - 66'3 \cdot 172'6 = 55'32$$

El coeficiente de correlación lineal de Pearson vale:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{55'32}{9'01 \cdot 6'76} = 0'91$$

Que confirma que se trata de una correlación lineal positiva (por ser el coeficiente positivo) y fuerte (por estar próximo a 1).

CONTROL 1 / ESTADÍSTICA / 28 SEP 07

Como las calificaciones de selectividad se dan con dos decimales, el profesor de Inglés las ha agrupado por intervalos para simplificar su estudio y los resultados son los de la tabla siguiente:

Nota de Inglés	*[1 , 3)*	*[3 , 5)*	*[5 , 7)*	*[7 , 9)*
Nº de alumnos	*12*	*16*	*24*	*11*

1. *Si dicho profesor tuviera que hacer un diagrama de sectores para representar las frecuencias relativas, ¿cuántos grados tendría el sector correspondiente a cada intervalo y a qué porcentaje de alumnos representaría?*
2. *Define varianza y desviación típica y calcula el valor de esta última.*

RESPUESTAS

1. Contestaremos a la pregunta añadiendo tres filas a la tabla para dar:
   - las frecuencias relativas de cada intervalo.
   - las frecuencias en tantos por ciento (redondeado en las centésimas) y
   - el número de grados (redondeando, también, en las centésimas) de cada sector.

Nota de Inglés	[1 , 3)	[3 , 5)	[5 , 7)	[7 , 9)	
Nº de alumnos	12	16	24	11	Total, N = 63
Frec. relativas	12/63	16/63	24/63	11/63	Total = 63/63 = 1
% de alumnos = Frec. Relat. · 100	19'05%	25'40%	38'10%	17'46%	Total = 100%
Nº de grados = Frec. Relat. · 360	68'57º	91'43º	137'14º	62'86º	Total = 360º

2. Varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética o también, es la media aritmética de los cuadrados de todos los datos menos el cuadrado de la media de dichos datos.

   Desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

   Necesitamos tener la media aritmética y, como la nota de Inglés está dada por intervalos, tomaremos las marcas de cada clase como valores de dichas notas.

Nota de Inglés, x_i	2	4	6	8
Nº de alumnos, n_i	12	16	24	11

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{2 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 6 \cdot 24 + 8 \cdot 11}{63} = \frac{320}{63} = 5'08$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{N} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{2^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 16 + 6^2 \cdot 24 + 8^2 \cdot 11}{63} - 5'08^2 = 3'91$$

Por lo tanto la desviación típica es $\sigma = \sqrt{3'91} = \boxed{1'98}$