FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar (o descomponer en factores) un polinomio consiste en sustituirlo por un producto indicado de otros de menor grado tales que si se multiplicasen el resultado sería dicho polinomio.

El método más adecuado para factorizar un polinomio $P(x)$ depende de cómo sea éste y de cuáles sean tus dotes de observación pero, ten presente que todos se basan en la misma idea: ¿qué multiplicación tiene como resultado el polinomio $P(x)$?

Los pasos (cada uno responde a un método) que hay que seguir para factorizar un polinomio son (y es conveniente que se siga el orden señalado) los siguientes:

1º) Siempre que se pueda, hay que ***sacar factor común***:

$$\boxed{a\cdot b \pm a\cdot c \pm a\cdot d \pm \ldots = a\cdot(b \pm c \pm d \pm \ldots)}$$

Un polinomio es una suma de monomios y en cada monomio únicamente hay multiplicaciones (las potencias de exponente natural representan un producto de factores iguales) y si todos los monomios tuviesen algún factor en común, dicho factor multiplicaría al polinomio resultante de quitárselo a cada monomio.

Ejemplo 1: *Descomposición en factores del binomio $4x^2 - 6x$:*

Como $4x^2 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{x} \cdot x$ *y* $6x = \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{x}$

Los factores subrayados están en los dos términos por lo que

$4x^2 + 6x = \underline{2}\cdot 2\cdot\underline{x}\cdot x + \underline{2}\cdot 3\cdot\underline{x} = \underline{2}\cdot\underline{x}\cdot(2x + 3)$ *es decir*

$$\boxed{4x^2 - 6x = 2x\cdot(2x - 3)}$$

Ejercicio 1: *Factoriza los polinomios que se indican sacando factor común:*

a) $5x^5 - x^4 + 3x^2$; b) $2x^3 + x$; c) $6x^3 - 15x^2 + 3x$; d) $2x^2 + 3x + 2$

Recuerda:

Un polinomio, $P(x)$, es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1\cdot x^1 + a_2\cdot x^2 + \ldots + a_n x^n$$

en la que a_0, a_1, a_2, … a_n son números reales conocidos y la letra x es la indeterminada del polinomio (sus exponentes tienen que ser números naturales).

Si se sustituye la inderminada, x, por un número, k, y se efectúan las operaciones, el resultado, $P(k)$, que se obtiene se denomina valor numérico de $P(x)$ para $x = k$.

Recuerda:

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO, RESPECTO A LA SUMA:

$$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Esta propiedad nos dice que el resultado de hacer las operaciones del primer miembro (una suma y una multiplicación) es el mismo que el de realizar las del segundo (dos multiplicaciones y una suma). Lo comprobaremos con un ejemplo numérico:

$$2\cdot(7 + 3) = 2\cdot 10 = 20$$

$$2\cdot 7 + 2\cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

En el conjunto de los polinomios, también se cumple la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

2º) Si se trata de una ***diferencia de cuadrados*** se descompone en suma por diferencia de la siguiente forma: $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)}$

Ejemplo 2: *Descomposición en factores de $4x^2 - 1$*

Como $4x^2 = (2x)^2$ y $1 = 1^2$; se trata de una diferencia de cuadrados, por tanto:

$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x+1)\cdot(2x-1)$ es decir:

$$\boxed{4x^2 - 1 = (2x+1)\cdot(2x-1)}$$

Ejercicio 2: *Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:*

a) $x^2 + 9$; *b)* $50x^2 - 8$; *c)* $9x^2 - 2$; *d)* $x^5 - x$

3º) Cuando se trata de un trinomio, puede ocurrir que sea el ***cuadrado de un binomio***

$$\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$$

Por eso, debemos comprobar si dos de los sumandos (el de mayor grado y el término independiente) son el cuadrado de dos monomios y el otro sumando es el doble del producto de dichos monomios.

Ejemplo 3: *Factorización del polinomio $9x^4 - 6x^2 + 1$*

Como $9x^4 = (3x^2)^2$, $1 = 1^2$ y $6x^2 = 2\cdot 3x^2\cdot 1$ se trata de un trinomio cuadrado perfecto:

$9x^4 - 6x^2 + 1 = (3x^2)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot 1 + 1^2 = (3x^2 - 1)^2$ es decir:

$$\boxed{9x^4 - 6x^2 + 1 = (3x^2 - 1)^2}$$

Ejercicio 3: *Expresa los siguientes trinomios como cuadrados de binomios:*

a) $x^2 + 16 + 8x$; *b)* $x^7 - 2x^4 + x$; *c)* $9x^2 + 12x - 4$; *d)* $2x^4 + 2\sqrt{6}\,x^2 + 3$

4º) Los trinomios de segundo grado de la forma $x^2 + Sx + P$ son, si S y P son números enteros, fácilmente factorizables ***por tanteo*** en el caso de que tengan raíces reales.

$$\boxed{x^2 + Sx + P = (x+a)\cdot(x+b) \text{ si } a + b = S \text{ y } a\cdot b = P}$$

Para encontrar a y b hay que buscar dos números cuyo producto sea P, y su suma, S.

Recuerda:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Esta expresión algebraica es una identidad y, por tanto, se cumple para cualesquiera que sean los números *a* y *b*.

Por ejemplo, para *a = 10 y b = 8*

$$(10+8)\cdot(10-8) = 18\cdot 2 = 36$$

$$10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

Vocabulario:

Al trinomio que es cuadrado de un binomio se le denomina *Trinomio Cuadrado Perfecto.*

$a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - 2ab + b^2$ son trinomios cuadrados perfectos porque

Recuerda:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dos identidades más, como puedes comprobar sustituyendo a y b por números cualesquiera y efectuar las operaciones de los dos miembros.

Fíjate:

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + a\cdot x + b\cdot x + a\cdot b =$$
$$= x^2 + (a+b)\cdot x + a\cdot b$$

Ejemplo 4: *Descompposición en factores, por tanteo, de* $x^2 + x - 6$

Queremos conseguir dos números, a y b tales que $(x + a)\cdot(x + b) = x^2 + x - 6$.

Como $a\cdot b = -6$ *y* $a + b = +1$ *no cuesta mucho adivinar que* $a = 3$ *y* $b = -2$ *; por tanto:*

$$\boxed{x^2 + x - 6 = (x + 3)\,(x - 2)}$$

Ejercicio 4: *Factoriza por tanteo los siguientes trinomios:*

a) $x^2 - 4x - 12$; *b)* $x^2 + 5 - 6x$; *c)* $x^2 + 2x + 3$; *d)* $x^2 - 2x - 35$

5º) Cualquier polinomio, $P(x)$, puede ser descompuesto en factores fácilmente ***si conocemos todas sus raíces***.

Sea **$P_n(x)$ un polinomio de grado n y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sus n raíces**. Se puede comprobar fácilmente que:

$$\boxed{P_n(x) = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots \cdot(x - x_n)}$$

Siendo A el coeficiente de x^n

En concreto:

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)}$$

Siendo x_1 y x_2 las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

es decir las soluciones de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$

Ejemplo 5: *Factorización del polinomio* $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$ *sabiendo que sus raíces son* $1/2$; ± 1; *y* 3

Puedes comprobar que, verdaderamente, $P(1/2)$, $P(1)$, $P(-1)$ *y* $P(3)$ *valen 0 y como, además, el coeficiente de* x^4 *es 2 se cumple que:*

$$\boxed{2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = 2\cdot(x - 1/2)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 3) = (2x - 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 3)}$$

Ejercicio 5: *Factoriza los siguientes trinomios calculando, previamente, sus raíces:*

a) $6x^2 - x - 2$; *b)* $5x^2 - 6x + 5$; *c)* $15x^2 + 2x - 8$; *d) Escribe un polinomio de tercer grado que se anule para* $x = \pm 1$ *y para* $x = 1/3$ *y que todos sus coeficientes sean enteros.*

Recuerda:

Se llaman raíces, o ceros, de $P(x)$ a los valores de x para los que $P(x) = 0$ es decir, si el número r es una raíz de $P(x)$ significa que $P(r) = 0$.

Recuerda:

Si un producto vale 0 es porque alguno de sus factores es 0.

Recuerda:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Importante:

La ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ no tiene solución real si $B^2 - 4\cdot A\cdot C < 0$ en ese caso, el polinomio $Ax^2 + Bx + C$ no tiene raíces reales y, por tanto, no se puede descomponer en producto de polinomios de primer grado por lo que se dice que es IRREDUCIBLE.

6º) Por la **regla de Ruffini** averiguamos el cociente y el resto de la división del polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$. Si el resto es 0 y el cociente C(x) se cumple que

$$\boxed{P(x) = (x - a)\cdot C(x)}$$

Debes tener en cuenta que cuando $P(x)$ tiene sus coeficientes enteros, si existiese algún valor entero de a, que cumple la relación anterior, necesariamente tiene que ser divisor exacto del término independiente de $P(x)$.

Como $C(x)$ tiene grado menor que $P(x)$, podríamos repetir el proceso para él y así sucesivamente.

Ejemplo 6: *Factorización de* $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

Si el polinomio tuviese alguna raíz entera se encontraría entre los divisores enteros de 8 que son: ±1, ±2, ±4 y ±8. Vamos probando +1, –1,+2, – 2,… hasta encontrar un valor que lo sea.

	1	–2	4	–8
1		1	–1	3
	1	–1	3	–5

NO

Dividendo: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
Divisor: $x - 1$
Cociente: $x^2 - x + 3$
Resto$= P(1) = -5$
$x = 1$ *NO es raíz de* $P(x)$
$(x - 1)$ *NO es factor de* $P(x)$

	1	–2	4	–8
–1		–1	3	–7
	1	–3	7	–15

NO

Dividendo: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $x^2 - 3x + 7$
Resto$= P(-1) = -15$
$x = -1$ *NO es raíz de* $P(x)$
$(x + 1)$ *NO es factor de* $P(x)$

	1	–2	4	–8
2		2	0	8
	1	0	4	0

SI

Dividendo: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
Divisor: $x - 2$
Cociente: $x^2 + 4$
Resto $= P(2) = 0$
$x = 2$ *SÍ es raíz de* $P(x)$
$(x - 2)$ *SÍ es factor de* $P(x)$

$$\boxed{x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)\cdot(x^2 + 4)}$$

Ejercicio 6: *Aplicando la Regla de Ruffini, factoriza lo más posible:*

a) $x^3 - 1$; *b)* $2x^3 - 5x^2 - 9$; *c)* $x^3 - 3x^2 + 4$; *d)* $x^4 + 2x^2 - 2x - 1$

Recuerda:

Dividendo = Divisor · Cociente + Resto

Si Resto = 0

Dividendo = Divisor · Cociente

Recuerda:

Teorema del resto:

El resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ coincide con $P(a)$.

Teorema del factor (consecuencia del anterior):

Si $x = a$ es raíz de $P(x)$ entonces $(x - a)$ es factor de $P(x)$.

CONCLUSIÓN:

Para factorizar un polinomio hay distintos métodos y, frecuentemente, hay que emplear más de uno pero, en general, trabajarás menos y lo harás más rápidamente si sigues el orden en que se te han expuesto.

Veamos qué puede ocurrir conforme el polinomio tiene mayor grado:

Grado 1: Un polinomio de primer grado, $Ax + B$, no se puede descomponer en producto de polinomios de grado menor que el suyo, lo más que puede ocurrir es que se pueda sacar algún factor común de los coeficientes.

Ejemplo 7: $4x + 6 = 2\cdot(2x + 3)$.

Siempre que se pueda se debe dejar el polinomio con coeficientes enteros. En el ejemplo anterior, es mejor dejar $2x + 3$ que, el producto, $2\cdot(x + 3/2)$.

Grado 2: Lo primero, si se puede, es sacar factor común; esto hará más fácil e incluso innecesario los pasos siguientes.

Ejemplo 8: $5x^2 + 10x = 5x\cdot(x + 2)$

Ejemplo 9: $18x^2 - 50 = 2\cdot(9x^2 - 25)$ *Continúa en el ejemplo 10*

A continuación, si se da alguna de las circunstancias contempladas en los pasos 2º (diferencia de cuadrados), 3º (trinomio cuadrado perfecto) y 4º (el coeficiente de x^2 es 1) ahorrarás tiempo si te das cuenta de ello; si no, tienes dos posibilidades, aplicar el paso 5º, o el 6º. La ventaja del 5º es que se va a lo seguro.

Ejemplo 10:	$2\cdot(9x^2 - 25)$	*Hay una diferencia de cuadrados*	$2\cdot(9x^2 - 25) = 2\cdot(3x + 5)\cdot(3x - 5)$
Ejemplo 11:	$9x^2 - 30x + 25$	*Es un trinomio cuadrado perfecto*	$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$
Ejemplo 12:	$x^2 + 2x - 15$	*Por tanteo*	$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)\cdot(x - 3)$
Ejemplo 13:	$10x^2 + 7x - 12$	*Hallando sus raíces*	$10x^2 + 7x - 12 = (5x - 4)\cdot(2x + 3)$ VER →

Es importante tener presente que hay polinomios de segundo grado que son *irreducibles* a

Resumen:

Para factorizar un polinomio de segundo grado, $Ax^2 + Bx + C$, siendo $A \neq 0$:

1º) Sacar factor común:
$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b + c).$$

2º) Ver si es una diferencia de cuadrados:
$$a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$$

3º) Ver si es un trinomio cuadrado perfecto:
$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

4º) Si el coeficiente de x^2 es 1 inténtalo por tanteo:
$$x^2 + Sx + P = (x + a)\cdot(x + b)$$
si $a\cdot b = P$ y $a + b = S$

5º) Si han fallado los métodos anteriores, halla las raíces x_1 x_2 (resolución de ecuación de 2º grado) y sustituye en: $Ax^2 + Bx + C = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$
ESTE MÉTODO ES EL MÁS SEGURO

6º) También puedes intentar encontrar divisores de la forma $(x \pm a)$ por la regla de Ruffini:
$$Ax^2 + Bx + C = (x \pm a)\cdot C(x)$$

Factorización de $10x^2 + 7x - 12$

Sus raíces son:
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 10\cdot(-12)}}{2\cdot 10} = \begin{cases} x_1 = 4/5 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

Como $Ax^2 + Bx + C = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

$$\begin{aligned} 10x^2 + 7x - 12 &= 10\cdot(x - 4/5)\cdot(x + 3/2) = \\ &= 5\cdot(x - 4/5)\cdot 2\cdot(x + 3/2) = \\ &= (5x - 4)\cdot(2x + 3) \end{aligned}$$

producto de polinomios de primer grado por no tener raíces reales.

Ejemplo 14: $x^2 + 3x + 4$ *1º tanteo y 2º hallando sus raíces* $x^2 + 3x + 4$ = *Es irreducible*

Grado 3 : Lo primero, como siempre si se puede, hay que sacar factor común; hará más fáciles los pasos siguientes.

Ejemplo 15: $5x^3 - 15x^2 = 5x^2\cdot(x-3)$

Ejemplo 16: $2x^3 - 10x - 24 = 2\cdot(x^3 - 5x - 12)$ *Continúa en el ejemplo 17*

Para factorizar un polinomio de tercer grado, hay que acudir al paso 6º (Ruffini) y si tiene alguna raíz entera a, el polinomio quedaría como producto de $(x - a)$ por un polinomio de 2º grado, el cociente de haberlo dividido por $(x - a)$.

Ejemplo 17: $2\cdot(x^3 - 5x - 12) = 2\cdot(x-3)\cdot(x^2 + 3x + 4)$ *No se puede factorizar más.*

Ejemplo 18: $9x^3 - 21x^2 - 5x + 25 = (x+1)\cdot(9x^2 - 30x + 25) = (x+1)\cdot(3x-5)^2$

Grado 4, 5, …: Para factorizar un polinomio de grado mayor que 3 en el que no se pueda sacar factor común, actuamos como en el de tercer grado (Ruffini) pero ahora habría que hacerlo más veces.

Ejemplo 19:
$$5x^4 - 10x^3 + 10x - 5 = 5\cdot(x^4 - 2x^3 + 10x - 1) =$$
$$= 5\cdot(x-1)\cdot(x^3 - x^2 - x + 1) =$$
$$= 5\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x^2 - 1) =$$
$$= 5\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1) = 5\cdot(x-1)^3\cdot(x+1)$$

Ejemplo 20:
$$2x^6 + 4x^5 - 38x^4 - 16x^3 + 120x^2 = 2x^2\cdot(x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60) = 2x^2\cdot(x-2)\cdot(x^3 + 4x^2 - 11x - 30) =$$
$$= 2x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2 + 2x - 15) =$$
$$= 2x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+5)$$

Si un polinomio de 4º grado no tuviese términos de grado impar se podrían utilizar los pasos 2º a 5º considerando que la indeterminada es x^2 (en vez de x) y así descomponerlo en producto de polinomios de 2º grado.

Ejemplo 21: $3x^4 - 12 = 3\cdot(x^4 - 4) = 3\cdot(x^2 + 2)\cdot(x^2 - 2) = 3\cdot(x^2 + 2)\cdot(x + \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})$

Ejemplo 22: $4x^4 - 20x^2 + 16 = 4\cdot(x^4 - 5x^2 + 4) = 4\cdot(x^2 - 1)\cdot(x^2 - 4) = 4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

OJO

Factorización de polinomios de Tercer grado grado, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, siendo $A \neq 0$:

1º) Sacar factor común:
$$a\cdot b + a\cdot c = a(b + c).$$

5º) Sabiendo sus raíces, x_1, x_2, x_3, no hay pega:
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)$$

El problema es que NO hay una fórmula sencilla para hallar las raíces de los polinomios de tercer grado.

6º) Por la regla de Ruffini (encontrar divisores $(x - a)$):
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - a)\cdot C(x)$ *y* $C(x)$ *es de segundo grado*

C☹MEC☹C☹S

¡CON DOS INDETERMINADAS!
¿Te astreves a intentar factorizarlos?

☹1. $6x^2y^2 + 10xy^3$

☹2. $75x^2y^4 - 3$

☹3. $3x^4y^3 - 6x^2y^2 + 3y$

☹4. $xy + x + 2y + 2$

☹5. $2x^2 - 3xy - 2y^2$

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ejercicio 1:

a) $5x^5 - x^4 + 3x^2 = x^2\cdot(5x^3 - x^2 + 3)$

b) $2x^3 + x = x\cdot(2x^2 + 1)$

c) $6x^3 - 15x^2 + 3x = 3x\cdot(2x^2 - 5x + 1)$

d) $2x^2 + 3x + 2$ *No tiene factores en común.*

Ejercicio 2:

a) $x^2 + 9 =$ *No es una diferencia de cuadrados.*

b) $50x^2 - 8 = 2\cdot(5x + 2)\cdot(5x - 2)$

c) $9x^2 - 2 = (3x + \sqrt{2})\cdot(3x - \sqrt{2})$

d) $x^5 - x = x\cdot(x^2 + 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)$

Ejercicio 3:

a) $x^2 + 16 + 8x = (x + 4)^2$

b) $x^7 - 2x^4 + x = x\cdot(x^3 - 1)^2$

c) $9x^2 + 12x - 4 =$ *No es el cuadrado de un binomio.*

d) $2x^4 + 2\sqrt{6}\, x^2 + 3 = (\sqrt{2}\, x^2 + \sqrt{3})^2$

Ejercicio 4:

a) $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)\cdot(x - 6)$

b) $x^2 + 5 - 6x = (x - 1)\cdot(x - 5)$

c) $x^2 + 2x + 3 =$ *No se puede.*

d) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5)\cdot(x - 7)$

Ejercicio 5:

a) $6x^2 - x - 2 = 6\cdot(x + 1/2)\cdot(x - 2/3) = (2x + 1)\cdot(3x - 1)$

b) $5x^2 - 6x + 5 =$ *No se puede, es irreducible.*

c) $15x^2 + 2x - 8 = (3x - 2)\cdot(5x + 4)$

d) $P(x) = (x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x - 1/3)\cdot 3 = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$

Ejercicio 6:

a) $x^3 - 1 = (x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)$

b) $2x^3 - 5x^2 - 9 = (x - 3)\cdot(2x^2 + x + 3)$

c) $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)\cdot(x - 2)^2$

d) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x - 1)^3\cdot(x + 1)$

C☺MEC☺C☺S

☺1. $6x^2y^2 + 10xy^3 = 2xy^2\cdot(3x + 5y)$

☺2. $75x^2y^4 - 3 = 3\cdot(5xy^2 + 1)\cdot(5xy^2 - 1)$

☺3. $3x^4y^3 - 6x^2y^2 + 3y = 3y\cdot(x^2y - 1)^2$

☺4. $xy + x + 2y + 2 = (x + 2)\cdot(y + 1)$

☺5. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = (2x + y)\cdot(x - 2y)$