Discutir las posibles soluciones del siguiente sistema (si las hubiera) según los valores del parámetro α

$$\begin{aligned} \alpha x + y &= 2 \\ y + z &= 1 \\ x + \alpha y &= 1 \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN:

El sistema puede representarse por la matriz $M^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$

Sea M la matriz de los coeficientes (sin la columna de los términos independientes).

Hallamos los valores de α para los que $|M| = 0$ lo que implicaría que sus filas son linealmente dependientes entre sí.

$$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1.$$ Por tanto:

Si $\alpha \neq \pm 1$ los primeros miembros de las tres ecuaciones serían linealmente independientes entre sí por lo que el sistema tendría solución única (al escalonar el sistema por el método de Gauss no se anularía el primer miembro de ninguna de las ecuaciones).

1.
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Selectividad - Extremadura
Junio 2000

Conocimientos específicos:

- Resolución/discusión de sistemas lineales por el método de Gauss.
- Rango de una matriz. Concepto y cálculo.
- Cálculo se determinantes.

Si $\alpha = 1 \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Incompatible.

Si $\alpha = -1 \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Incompatible.

Conclusión:

$\forall\ \alpha \neq \pm 1$ *Sistema Compatible Determinado* *(Solución única)*	Para $\alpha = \pm 1$ *Sistema Incompatible* *(No tiene solución)*

2.
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Selectividad - Extremadura
Junio 2001

1) Discutir y resolver, si es posible, en función del valor del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{array}{llll} x & -y & +z & =0 \\ x & +(\lambda+1)y & +z & =0 \\ x & +y & +(\lambda+1)z & =0 \end{array}$$

Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

Por tratarse de un sistema homogéneo es evidente que es compatible pues, al menos, admite la solución trivial (x, y, z) = (0, 0, 0); lo que averiguaremos es si admite más soluciones.

El sistema puede representarse por la matriz $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sea M la matriz de los coeficientes (sin la columna de los términos independientes).

Hallamos los valores de λ para los que $|M| = 0$ lo que implicaría que sus filas son linealmente dependientes entre sí y, por lo tanto, en este caso lo serían, también las ecuaciones y podríamos prescindir de alguna.

$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda = -2$ Por tanto:

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -2$ los primeros miembros de las tres ecuaciones serían linealmente independientes entre sí por lo que, al escalonar el sistema por el método de Gauss no se anularía el primer miembro de ninguna de las ecuaciones y, el sistema tendría solución única que es, como ya

Conocimientos específicos:

- Resolución/discusión de sistemas lineales por el método de Gauss.
- Rango de una matriz. Concepto y cálculo.
- Cálculo se determinantes.

sabemos, la trivial.

Para $\lambda = 0$ ó $\lambda = -2$ el sistema tendrá infinitas soluciones (compatible indeterminado)

$$\text{Si } \lambda = 0 \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 0 \\ z = -r \,;\, \forall r \in \Re \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = -2 \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = s \,;\, \forall s \in \Re \end{cases}$$

Conclusión:

$$\boxed{(x, y, z) = \begin{cases} (0,0,0) & & si \quad \lambda \neq 0 y \neq -2 \\ (r,0,-r) & | \, r \in \Re & si \quad \lambda = 0 \\ (0,s,s) & | \, s \in \Re & si \quad \lambda = -2 \end{cases}}$$

Discutir según los valores de m el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrrl} mx & -y & -z & = 3 \\ x & +2y & +z & = 1 \\ x & -3y & -z & = 2 \end{array}$$

Justificar la respuesta.

3.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 2007

Conocimientos específicos:

- Resolución/discusión de sistemas lineales por el método de Gauss.
- Rango de una matriz. Concepto y cálculo.
- Cálculo se determinantes.

RESOLUCIÓN:

El sistema puede representarse por la matriz $M^* = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -3 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$

Sea M la matriz de los coeficientes (sin la columna de los términos independientes).

Hallamos los valores de m para los que $|M| = 0$ lo que implicaría que sus filas son linealmente dependientes entre sí.

$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$. Por tanto:

Si $m \neq -3$ los primeros miembros de las tres ecuaciones serían linealmente independientes entre sí por lo que el sistema tendría solución única (al escalonar el sistema por el método de Gauss no se anularía el primer miembro de ninguna de las ecuaciones).

Si $m = -3$

$$M^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -3 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 4 & -2 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ El sistema es incompatible pues la tercera fila representa a la ecuación

$0x + 0y + 0z = 7$ que no tiene solución

Conclusión:

$\forall\, m \neq -3$	Para $m = -3$
Sistema Compatible Determinado	*Sistema Incompatible*
(Solución única)	*(No tiene solución)*

Nota:

Se puede demostrar que para $m = -3$ el sistema es incompatible porque $\begin{cases} Rang(M) = 2 \\ Rang(M^*) = 3 \end{cases}$