CONTROL 19 EXAMEN FINAL 16 JUN 08

1. Halla el valor exacto, en forma polar, de $2_{120^\circ} - 2_{60^\circ}$.
2. Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman entre sí un ángulo de 82º. La velocidad del primero es 18 millas/hora, y la del segundo, 25 millas/hora. Si mantienen inalterables el rumbo y la velocidad ¿podrán seguir en contacto por radio al cabo de 3 horas si el alcance máximo de sus equipos de radio es de 180 millas?
3. Resuelve la ecuación: $3-8\cdot\text{sen}^2(2x-40^\circ)=1$
4. Dados los puntos $A(-2,3)$ y $B(1,-1)$ halla las coordenadas de los puntos que están alineados con los dos pero a triple distancia de A que de B.
5. Halla la ecuación general de las rectas que distan dos unidades de la recta $s\equiv(3x-4y+8=0)$
6. Halla el dominio de la función f definida por $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.
7. Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{5x^2+2}$ en $x=1$.

1. Para hallar el valor de $2_{120^\circ} - 2_{60^\circ}$ pasaremos los complejos a forma binómica, los restaremos y el resultado lo volveremos a la forma polar.

$$\left.\begin{array}{l} 2_{120^\circ}=(2\cdot\cos 120^\circ)+(2\cdot\text{sen}120^\circ)i=-1+\sqrt{3}\cdot i \\ 2_{60^\circ}=(2\cdot\cos 60^\circ)+(2\cdot\text{sen}60^\circ)i=1+\sqrt{3}\cdot i\end{array}\right\} \Rightarrow 2_{120^\circ}-2_{60^\circ}=(-1+\sqrt{3}\cdot i)-(1+\sqrt{3}\cdot i)=-2=\boxed{2_{180^\circ}}$$

2. Al cabo de 3 horas se podrán comunicar por radio si la distancia a entre ellos es menor de 180 millas.

Las posiciones de los barcos y el punto de partida forman un triángulo en el que el ángulo opuesto a a es $\hat{A}=82^\circ$ y los lados que lo forman son las distancias recorridas por los barcos en ese tiempo: $b=3\cdot 25=75$ millas y $c=3\cdot 18=54$ millas.

Aplicando el teorema del coseno:

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}}=\sqrt{75^2+54^2-2\cdot 75\cdot 54\cdot\cos 82^\circ}\cong 86'10 \text{ millas} < 180 \text{ millas}$$

Por lo tanto,

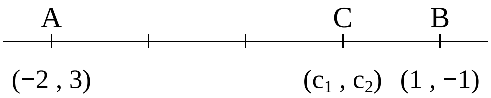
$\boxed{\text{los barcos si que pueden ponerse en contacto por radio al cabo de 3 horas.}}$

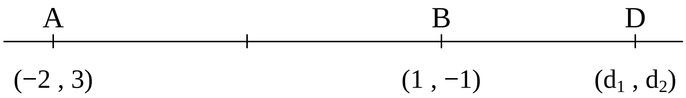
3. Para resolver la ecuación basta con despejar primero el seno, después el ángulo y, por último, la x:

$$3-8\cdot\text{sen}^2(2x-40^\circ)=1 \Rightarrow \text{sen}^2(2x-40^\circ)=\frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}(2x-40^\circ)=\begin{cases}+1/2 & \Rightarrow (I)\\ -1/2 & \Rightarrow (II)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(I)\begin{cases}2x-40=30+360k & \Rightarrow\\ 2x-40=150+360k & \Rightarrow\end{cases}\\[2ex] (II)\begin{cases}2x-40=210+360k & \Rightarrow\\ 2x-40=330+360k & \Rightarrow\end{cases}\end{array}\right. \boxed{\left.\begin{array}{l}x=35^{\circ}+180^{\circ}\cdot k\\ x=95^{\circ}+180^{\circ}\cdot k\\[2ex] x=125^{\circ}+180^{\circ}\cdot k\\ x=185^{\circ}+180^{\circ}\cdot k\end{array}\right\}\ \forall k\in\mathbb{Z}}$$

4. Hay dos puntos, C y D, que cumplen las condiciones pedidas, sea $\mathrm{C}(c_1, c_2)$ el que queda entre $\mathrm{A}(-2, 3)$ y $\mathrm{B}(1, -1)$ y $\mathrm{D}(d_1, d_2)$ el que queda fuera.





$$\mathrm{d(C,A)=3d(C,B)}$$

$$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\mathrm{d(D,A)=3d(D,B)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{BD}} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

Las coordenadas de un vector son las de su extremo menos las de su origen por lo tanto:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\overrightarrow{\mathrm{CB}} \Rightarrow (3\ ,\ -4) = 4\cdot(1-c_1, -1-c_2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}4(1-c_1)=3 \quad\ \Rightarrow c_1=1/4\\ 4(-1-c_2)=-4 \Rightarrow c_2=0\end{array}\right\} \boxed{\mathrm{C}(1/4, 0)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{BD}} \Rightarrow (3\ ,\ -4) = 2\cdot(d_1-1, d_2+1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2(d_1-1)=3 \quad\ \Rightarrow d_1=5/2\\ 2(d_2+1)=-4 \Rightarrow d_2=-3\end{array}\right\} \boxed{\mathrm{D}(5/2, -3)}$$

5. Las rectas pedidas tienen que ser paralelas a $s \equiv (\ 3x-4y+8=0\ )$ por lo tanto su expresión general es de la forma $r \equiv (3x-4y+C=0)$. Por otra parte la distancia entre dos rectas paralelas es la que va de un punto de una, a la otra y si el punto es $P(x_0\ , y_0)$ y la recta $r \equiv (Ax+By+C=0)$ la distancia entre ellos es: $d(P\ , r)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Un punto de la recta s es el que tenga por coordenadas cualquiera de las soluciones de su ecuación, por ejemplo el $P(0\ , 2)$ por lo tanto, aplicamos la fórmula anterior a este caso:

$$d(P\ , r)=2 \quad\Rightarrow\quad \frac{|3\cdot 0-4\cdot 2+C|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \mathbf{2} \quad\Rightarrow\quad |C-8|=10 \;\Rightarrow\; \begin{cases}C_1=18\\ C_2=-2\end{cases}$$

Las rectas pedidas son: $\boxed{\begin{array}{l}r_1 \equiv \quad 3x-4y+18=0\\ r_2 \equiv \quad 3x-4y-2=0\end{array}}$

6. El dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, el conjunto de valores reales de x para los que existe $f(x)$:

$$D(f)=\{x\in\Re \mid \text{f(x)}\in\Re\}$$

En este caso, como f(x)= $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ para que $f(x)\in\Re \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ porque las raíces pares de números negativos no son reales.

Resolviendo la inecuación $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ tendremos el dominio de f:

$$\text{Fronteras:}\begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \quad x=1 \\ x+3=0 & \Rightarrow \quad x=-3 \end{cases}$$

Valores de x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$x>1$
Valor numérico de $\dfrac{x-1}{x+3}$	$\dfrac{-}{-}=+$	$\dfrac{-4}{0}=\nexists$	$\dfrac{-}{+}=-$	$\dfrac{0}{4}=0$	$\dfrac{+}{+}=+$

Por lo tanto, el dominio de f es:

$$\boxed{D(f)=(-\infty\,,-3)\cup[1,+\infty)}$$

7. Recta tangente a $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{5x^2+2}$ en $x=1 \Rightarrow f(1)=\dfrac{2\cdot 1^2-5}{5\cdot 1^2+2}=-\dfrac{3}{7} \Rightarrow$ Punto $P(1,-3/7)$

La pendiente de la recta tangente a f en el punto $P(1,-3/7)$ coincide con el valor que tenga $f'(x)$ en ese punto, es decir, con el valor de $f'(1)$

$$f(x)=\frac{2x^2-5}{5x^2+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x(5x^2+2)-(2x^2-5)\cdot 10x}{(5x^2+2)^2}=\frac{58x}{(5x^2+2)^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{58}{49}$$

la ecuación de dicha recta tangente , en la forma punto-pendiente es: $y+\dfrac{3}{7}=\dfrac{58}{49}\cdot(x-1)$

que, pasada a la forma general resulta:

$$\boxed{58x-49y-79=0}$$

CONTROL 18 EXAMEN DE FUNCIONES 6 JUN 08

Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (también en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x)=\begin{cases} 5x+15 & si\ \ 0\le x\le 3 \\ 21+6x-x^2 & si\ \ 3< x\le 8 \end{cases}$$

Contesta a las siguientes preguntas JUSTIFICANDO ALGEBRAICAMENTE LAS RESPUESTAS:

1. ¿Se trata de una función continua en todo su dominio?
2. ¿Y derivable?
3. ¿Cuándo crecen y cuándo decrecen los beneficios?
4. ¿Cuándo se obtiene el máximo y el mínimo beneficio?
5. ¿Cuál es la superficie limitada por los ejes cartesianos, la recta $x=8$ y la gráfica de la función B?

$\boxed{1\ y\ 2.}$

Se trata de una función definida a trozos por expresiones polinómicas siendo su dominio de definición o de existencia, el intervalo $[0,8]$.

En el intervalo $[0\ ,\ 3]$ está definida por $B(x)=5x+15$ por lo que, al tratarse de una función afín, es continua y derivable (siendo su derivada en éste intervalo $B'(x)=5$).

En el intervalo $(3\ ,\ 8]$ está definida por $B(x)=21+6x-x^2$ por lo que, al tratarse de una función cuadrática, es continua y derivable (su derivada es, en este intervalo, $B'(x)=6-2x$)

Estudiamos la función en $x=3$ frontera entre los intervalos que la definen de distinta manera:

- Para que sea continua en $x=3$ se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 3^-} B(x)=B(3)=\lim\limits_{x\to 3^+} B(x)$

$$\lim_{x\to 3^-} B(x)=\lim_{x\to 3^-}(5x+15)=30=B(3) \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+} B(x)=\lim_{x\to 3^+}(21+6x-x^2)=30$$

Por lo tanto, también es continua en $x=3$.

- Para que sea derivable en $x=3$ debe cumplirse, además, que $B'(3^-)=B'(3^+)$ y como

si $x\to 3^-$ pertenece al primer intervalo y en él la derivada es $B'(x)=5 \Rightarrow B'(3^-)=5$

si $x\to 3^+$ pertenece al segundo intervalo y en él $B'(x)=6-2x \Rightarrow B'(3^+)=6-2\cdot 3=0$

Al no coincidir los valores de las derivadas laterales, la función no es derivable en $x=3$.

La función B es continua en el intervalo $[0\ ,\ 8]$ es decir en todo su dominio de definición y, únicamente, NO es derivable en $x=3$

$\boxed{3\ y\ 4.}$

El crecimiento-decrecimiento de B nos lo da el signo de la derivada:

- En el intervalo [0 , 3] la derivada es positiva $(B'(x) = 5 > 0)$ por lo tanto B es creciente lo que significa que en este intervalo el valor mínimo está en el origen $B(0) = 5\cdot 0 + 15 = 15$ (miles de euros) y el valor máximo en el final $B(3) = 5\cdot 3 + 15 = 30$ (miles de euros).
- En el intervalo $(3$, 8] la derivada, $B'(x) = 6 - 2x$, es negativa (pues $\forall x > 3 \Rightarrow 6 - 2x < 0$) por lo tanto B es decreciente por lo que el valor máximo está en su origen $B(3) = 30$ (miles de euros) y el mínimo en el final $B(8) = 21 + 6\cdot 8 - 8^2 = 5$ (miles de euros).

Conclusión:

Cuando no hay inversión en promoción ($x = 0$) los beneficios son de 15.000 €. A medida que se invierte más en promoción los beneficios van aumentando hasta que, **cuando la inversión en promoción es de 3.000 €, se consiguen los máximos beneficios**, que ascienden a 30.000 €.

A partir de ahí, al aumentar la inversión en promoción van disminuyendo los beneficios hasta llegar al **mínimo valor cuando la inversión en promoción es de 8.000 €**, consiguiéndose entonces unos beneficios de 5.000 €.

$\boxed{5.}$

Teniendo en cuenta que se trata de una función definida a trozos pero que, en los dos intervalos, únicamente toma valores positivos, el valor de la superficie pedida viene dado por:

$$A = \int_0^3 (5x+15)dx + \int_3^8 (21+6x-x^2)dx = \left[\frac{5}{2}x^2 + 15x\right]_0^3 + \left[21x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_3^8 =$$

$$= \left[\frac{5}{2}(3^2 - 0^2) + 15(3-0)\right] + \left[21(8-3) + 3(8^2 - 3^2) - \frac{1}{3}(8^3 - 3^3)\right] =$$

$$= \frac{1055}{6} \cong \boxed{175'83\ \ (u.l.)^2}$$

CONTROL 17 (1º B) INTEGRALES 22 MAYO 08

1. *Halla razonadamente la primitiva de la función* $f(x)=\dfrac{5+3x}{x}$ *cuya gráfica pasa por el punto* $P(1,2)$.

Sea F la función pedida. Por ser primitiva de f :

$$F(x)=\int\frac{5+3x}{x}\,dx=\int\left(\frac{5}{x}+3\right)dx=5\int\frac{1}{x}\,dx+3\int 1\,dx=5\ln x+3x+C \quad (\text{con } C\in\Re)$$

$F(x)=5\ln x+3x+C$ y, como pasa por el punto $P(1,2)\Rightarrow F(1)=2$ es decir:

$5\ln 1+3\cdot 1+C=2 \Rightarrow C=-1$ por lo tanto: $\boxed{F(x)=5\ln x+3x-1}$

Comprobación: $F'(x)=5\,\dfrac{1}{x}+3=\dfrac{5+3x}{x}=f(x)$ y $F(1)=5\ln 1+3\cdot 1-1=2$

2. Halla razonadamente: $\int\left[(1-2x)^3+4\cdot 5^x-6\cos 7x\right]dx$

$$\int\left[(1-2x)^3+4\cdot 5^x-6\cos 7x\right]dx=\int(1-2x)^3dx+4\int\left(5^x\right)dx-6\int\left(\cos 7x\right)dx=$$

$$=\frac{-1}{8}\int 4(1-2x)^3(-2)\,dx+\frac{4}{\ln 5}\int 5^x\ln 5\,dx-\frac{6}{7}\int(\cos 7x)7\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{-1}{8}(1-2x)^4+\frac{4}{\ln 5}5^x-\frac{6}{7}\operatorname{sen}7x+C \quad (\text{con } C\in\Re)}$$

3. Halla razonadamente el área de la región cerrada comprendida entre las gráficas de las funciones:

$$g(x)=x^2-3 \;\text{ y }\; h(x)=3x+1$$

Los puntos de corte de las dos funciones corresponden a la solución del sistema: $\begin{cases} y=x^2-3 \\ y=3x+1 \end{cases}$ Igualando:

$$x^2-3=3x+1\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow(x+1)\cdot(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}\Rightarrow \text{los puntos son }\begin{cases} (-1,-2) \\ (4,13) \end{cases}$$

Entre estos dos puntos la gráfica de h va por encima de la de g como podemos comprobar sustituyendo x por cualquier valor del intervalo $(-1,4)$ por lo tanto:

$$A=\int_{-1}^{4}h(x)\,dx-\int_{-1}^{4}g(x)\,dx=\int_{-1}^{4}[h(x)-g(x)]\,dx=\int_{-1}^{4}\left[(3x+1)-(x^2-3)\right]dx=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx=$$

$$=\left[\frac{-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}=\left(\frac{-1}{3}\cdot 4^3+\frac{3}{2}\cdot 4^2+4\cdot 4\right)-\left(\frac{-1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)\right)=$$

$$=\frac{56}{3}-\left(\frac{-13}{6}\right)=\boxed{\frac{125}{6}(\text{u.l.})^2}\cong\boxed{20'83\,(\text{u.l.})^2}$$

CONTROL 17 (1º C) INTEGRALES 22 MAYO 08

1. *Halla razonadamente la primitiva de la función* $f(x)=\dfrac{5+2x^3}{x^3}$ *cuya gráfica pasa por* $P(-1,0)$.

Sea F la función pedida. Por ser primitiva de f :

$$F(x)=\int\frac{5+2x^3}{x^3}\,dx=\int\left(\frac{5}{x^3}+2\right)dx=5\int x^{-3}\,dx+2\int 1\,dx=\frac{-5}{2}x^{-2}+2x+C\quad(\text{con } C\in\Re)$$

$F(x)=\dfrac{-5}{2x^2}+2x+C$ y, como pasa por el punto $P(-1,0)\ \Rightarrow\ F(-1)=0$ es decir:

$\dfrac{-5}{2(-1)^2}+2\cdot(-1)+C=0\ \Rightarrow\ C=\dfrac{9}{2}$ por lo tanto: $\boxed{F(x)=\dfrac{-5}{2x^2}+2x+\dfrac{9}{2}}$

Comprobación:

$$F'(x)=\frac{0-(-5)\,4x}{4x^4}+2=\frac{5}{x^3}+2=\frac{5+2x^3}{x^3}=f(x)\quad \text{y}\quad F(-1)=\frac{-5}{2(-1)^2}+2(-1)+\frac{9}{2}=0$$

2. Halla razonadamente: $\int\left[2\cdot 3^x+4\,\text{sen}\,5x-6\cdot(7x-8)^9\right]dx$

$$\int\left[2\cdot 3^x+4\,\text{sen}\,5x-6\cdot(7x-8)^9\right]dx=2\int 3^x\,dx+4\int(\text{sen}\,5x)\,dx-6\int(7x-8)^9\,dx=$$

$$=\frac{2}{\ln 3}\int 3^x\ln 3\,dx+\frac{-4}{5}\int(-\text{sen}\,5x)\,5\,dx-\frac{6}{10\cdot 7}\int 10\,(7x-8)^9\cdot 7\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{2}{\ln 3}3^x-\frac{4}{5}\cos 5x-\frac{3}{35}(7x-8)^{10}+C\quad(\text{con } C\in\Re)}$$

3. Halla razonadamente el área de la región cerrada comprendida entre la gráfica de la curva $g(x)=(x-2)^3$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=4$.

Analizamos el signo de $g(x)$ en el intervalo $[1\ ,\ 4]$:

$g(x)=0\ \Rightarrow\ (x-2)^3=0\ \Rightarrow\ x=2$; si $x\in[1,2)\Rightarrow g(x)<0$ y si $x\in(2,4]\Rightarrow g(x)>0$

Por lo tanto: $A=-\int_1^2(x-2)^3\,dx+\int_2^4(x-2)^3\,dx=-\dfrac{1}{4}\Big[(x-2)^4\Big]_1^2+\dfrac{1}{4}\Big[(x-2)^4\Big]_2^4=$

$$-\frac{1}{4}\left[(2-2)^4-(1-2)^4\right]+\frac{1}{4}\left[(4-2)^4-(2-2)^4\right]=\boxed{\frac{17}{4}(u.l.)^2}=\boxed{4'25\ (u.l.)^2}$$

CONTROL 16 (1º B) D E R I V A D A S 13 MAYO 08

1. Halla la derivada de las funciones: a) $f(x) = \text{cotg}\, x$ b) $g(x) = 3\log^5(\text{cotg}\, e^{2x})$

NOTA: Deben quedar en función de senos y cosenos como únicas razones trigonométricas.

a) $f(x) = \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(-\text{sen}\, x)\cdot(\text{sen}\, x) - (\cos x)\cdot(\cos x)}{(\text{sen}\, x)^2} = \dfrac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{-1}{\text{sen}^2 x}$

$$\boxed{f(x) = \text{cotg}\, x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}}$$

b) $g(x) = 3\log^5(\text{cotg}\, e^{2x})$

$$g'(x) = 15\log^4(\text{cotg}\, e^{2x}) \cdot \frac{1}{\left(\text{cotg}\, e^{2x}\right)\cdot \ln 10} \cdot \frac{-1}{\text{sen}^2 e^{2x}}\, e^{2x} \cdot 2 = \frac{-30e^{2x}}{(\ln 10)\cdot\left(\cos e^{2x}\right)\cdot\left(\text{sen}\, e^{2x}\right)} \log^4 \frac{\cos e^{2x}}{\text{sen}\, e^{2x}}$$

$$\boxed{g(x) = 3\log^5(\text{cotg}\, e^{2x}) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{-30e^{2x}}{(\ln 10)\cdot\left(\cos e^{2x}\right)\cdot\left(\text{sen}\, e^{2x}\right)} \log^4 \frac{\cos e^{2x}}{\text{sen}\, e^{2x}}}$$

2. Halla razonadamente la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ en el punto en que la ordenada vale 2.

Hallamos la abscisa del punto en el que $y = 2$:

$h(x) = 2 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-1} = 2 \Rightarrow x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow x = 4$ se trata del punto $A(4\ ,\ 2)$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual a la derivada de dicha función en ese punto, por lo tanto, $m = h'(4)$

$$h(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow h'(x) = \frac{1\cdot(x-1) - (x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow h'(4) = m = \frac{-3}{(4-1)^2} = \frac{-1}{3}$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_0\ ,y_0)$ y cuya pendiente es m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

por lo tanto, en este caso: $y - 2 = \dfrac{-1}{3}(x-4)$ es la ecuación de la recta pedida. La pasamos a la forma general:

$$y - 2 = \frac{-1}{3}(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad 3y - 6 = -x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y - 10 = 0$$

$$\boxed{x + 3y - 10 = 0}$$

CONTROL 16 (1º C) D E R I V A D A S 12 MAYO 08

1. Halla la derivada de las funciones: a) $f(x)=\sec\ x$ b) $g(x)=5\sec^3 4^{\log 2x}$

NOTA: Deben quedar en función de senos y cosenos como únicas razones trigonométricas.

$$a)\ f(x)=\sec\ x=\frac{1}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{0\cdot\cos x\ -\ 1\cdot(-\text{sen}\ x)}{(\cos x)^2}=\frac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{f(x)=\sec\ x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}}$$

$$b)\ g(x)=5\sec^3 4^{\log 2x} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=15\sec^2 4^{\log 2x}\ \frac{\text{sen}\ \ 4^{\log 2x}}{\cos^2\ 4^{\log 2x}}\ 4^{\log 2x}\ \ln 4\ \frac{1}{2x\ \ln 10}\ 2\ =$$

$$=\frac{15\cdot(\log 4)\cdot 4^{\log 2x}\cdot\text{sen}\ 4^{\log 2x}}{x\cdot\cos^4\ 4^{\log 2x}}$$

$$\boxed{g(x)=5\sec^3 4^{\log 2x} \quad\Rightarrow\quad g'(x)=\frac{15\cdot(\log 4)\cdot 4^{\log 2x}\cdot\text{sen}\ 4^{\log 2x}}{x\cdot\cos^4\ 4^{\log 2x}}}$$

2. Halla razonadamente los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ es paralela a la recta de ecuación $x-3y+12=0$

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

La pendiente de la recta $x-3y+12=0 \iff y=\frac{1}{3}x+4$ es $m=\frac{1}{3}$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual al valor de la derivada de dicha función en ese punto por lo que hallaremos en qué puntos se cumple que $h'(x)=\dfrac{1}{3}$

$$h(x)=\frac{x-1}{x+2} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{1\cdot(x+2)\ -\ (x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad (x+2)^2=9 \quad\Rightarrow\quad x+2=\pm 3 \quad\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=-5\end{cases}$$

Si $x=1 \quad\Rightarrow\quad y=h(1)=\dfrac{1-1}{1+2}=0 \quad\Rightarrow$ Punto $\boxed{\text{P}(1,0)}$

Si $x=-5 \quad\Rightarrow\quad y=h(-5)=\dfrac{-5-1}{-5+2}=2 \quad\Rightarrow$ Punto $\boxed{\text{Q}(-5,2)}$

CONTROL 15 FUNCIONES 25 ABR 08

1º B

1. Resuelve: $3\ln(x-1)-\ln(x^2-1)=-\ln 3$

$$\ln\frac{(x-1)^3}{x^2-1}=\ln\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(x-1)^3}{x^2-1}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)^3}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x+1)}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{1}{3} \quad 3x^2-6x+3=x+1 \Rightarrow$$

$$3x^2-7x+2=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\begin{cases}2\\1/3\end{cases}$$

Comprobaciones en la ecuación original:

$x=2 \Rightarrow 3\cdot\ln(2-1)-\ln(2^2-1)=-\ln 3$

$\Rightarrow -\ln 3=-\ln 3 \Rightarrow x=2$ sí es solución

$x=1/3$ no es solución porque en la ecuación original da lugar a logaritmos de números negativos cosa que no puede ser.

$$\boxed{x=2}$$

2. Demuestra que la derivada de $f(x)=3x^2-5$ *es* $f'(x)=6x$

$$f(x)=3x^2-5$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-5-(3x^2-5)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-5-3x^2+5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6x+3h}{1}=6x$$

1º C

1. Resuelve: $\log x^3-\log\frac{7x+8}{2}=\log 2x$

$$\log\ x^3=\log\ 2x+\log\ \frac{7x+8}{2} \Rightarrow$$

$$\log\ x^3=\log\ 2x\cdot\frac{7x+8}{2} \Rightarrow$$

$$x^3=x\ (7x+8) \Rightarrow x^3=7x^2+8x$$

$$x^3-7x^2-8x=0 \Rightarrow x\cdot(x-8)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$$

Algún factor tiene que ser $0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=8\\x=-1\end{cases}$

Comprobaciones en la ecuación original:

$x=0$ y $x=-1$ no son soluciones porque en la ecuación original dan lugar a logaritmo de 0 o de números negativos, cosa que no puede ser.

$$x=8 \Rightarrow \log\ 8^3-\log\ \frac{7\cdot 8+8}{2}=\log\ 2\cdot 8 \Leftrightarrow$$

$$\log 512-\log 32=\log 16 \Leftrightarrow 1'2041..=1'2041...$$

Como se cumple, la única solución es:

$$\boxed{x=8}$$

2. Demuestra que la derivada de $f(x)=x^2+3x$ *es* $f'(x)=2x+3$

$$f(x)=x^2+3x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h+3}{1}=2x+3$$

CONTROL 14 (IºB) Continuidad y asíntotas 02 ABR 08

Haz un estudio razonado de las discontinuidades y de las asíntotas horizontales y verticales de la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2x^2-6x} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

RESPUESTA

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-6x}$ por lo que únicamente es discontinua en los valores del intervalo para los que no existe $f(x)$ que son los que anulan al denominador:

$$2x^2-6x=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot x\cdot(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ o } x=3$$

pero ninguno de los dos valores pertenecen al intervalo, por lo tanto

> En el intervalo $(-\infty, 0)$ no hay ninguna discontinuidad

- En el intervalo $(0, +\infty)$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$. Averiguamos, igual que antes, los valores que anulan el denominador:

$$x^2-2x+1=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{3}{0}=\begin{cases}-\infty & si\ x\to1^-\\ +\infty & si\ x\to1^+\end{cases}$$

> En $x=1$ hay una discontinuidad inevitable,
> se produce un "salto" de $-\infty$ a $+\infty$

- Por último, estudiamos la continuidad en $x=0$, frontera entre los dos intervalos que la definen:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{2x^2-6x}=\frac{+1}{0^+}=+\infty$$

$$f(0)=\frac{0^3-1}{0^2-2\cdot0+1}=\frac{-1}{+1}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{-1}{+1}=-1$$

> En $x=0$ hay una discontinuidad inevitable,
> la función pasa de $+\infty$ a -1
>
> (la discontinuidad se produce por la izquierda).

ASÍTOTAS:

- Verticales:

Como vimos antes, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$

y, también: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ y \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow$

Sus asíntotas verticales son:

El semieje positivo de ordenadas
(de ecuación $x = 0$)

y la recta de ecuación $x = 1$
(esta última es doblemente asíntota).

Como para ningún otro valor de x se cumple que $f(x) \to \infty$, no hay más asíntotas verticales.

- Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{2x^2-6x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{6}{x}} = \frac{0}{2} = 0$$

La recta de ecuación $y = 0$,
por la izquierda
(el semieje negativo de abscisas),
es asíntota horizontal de la función.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{x}^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

La función no tiene asíntota
horizontal por la derecha,.

CONTROL 14 (IºC) Continuidad y asíntotas 01 ABR 08

Haz un estudio razonado de las discontinuidades y de las asíntotas de la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x^2-6x} & \text{si } x<1 \\[2ex] \dfrac{3x^2-12}{x^2+3x-10} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

RESPUESTA

- En el intervalo $(-\infty,1)$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2-6x}$ por lo que, únicamente, es discontinua en los valores del intervalo para los que no esté definida que son los que anulan al denominador:

$$2x^2-6x=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot x\cdot(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ o } x=3$$

como $3\notin(-\infty,1)$, el único punto en que es discontinua del primer intervalo es en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2-6x}=\frac{-1}{0}=\begin{cases}\xrightarrow{si\ x\to 0^-}-\infty \\ \xrightarrow{si\ x\to 0^+}+\infty\end{cases}$$

> En $x=0$, la función pasa de $-\infty$ (izquierda) a $+\infty$ (derecha)
> es, por lo tanto, una discontinuidad inevitable.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^2+3x-10}$. Averiguamos, igual que antes, los valores que anulan el denominador:

$$x^2+3x-10=0 \;\Rightarrow\; (x-2)\cdot(x+5)=0 \;\Rightarrow\; x=2 \text{ o } x=-5$$

Pero al intervalo $(1,+\infty)$ solo pertenece $x=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(3x+6)}{(x-2)\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+6}{x+5}=\frac{12}{7}$$

> En $x=2$ hay una discontinuidad evitable,
> la función sería continua haciendo $f(2)=\dfrac{12}{7}$

- Estudiamos la continuidad en $x=1$, frontera entre los dos intervalos que la definen:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{2x^2-6x}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2-12}{x^2+3x-10}=\frac{-9}{-6}=\frac{3}{2}$$

> En $x=1$ hay una discontinuidad inevitable,
> la función pasa de 0 (izquierda) a $\dfrac{3}{2}$ (derecha).

ASÍTOTAS:

- Verticales:

Como vimos antes: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ y \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{La recta de ecuación } x = 0\text{, que es el eje de ordenadas, es doblemente asíntota de } f\text{.}}$$

Como para ningún otro valor de x se cumple que $f(x) \to \infty$, no hay más asíntotas verticales.

- Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{2x^2-6x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{6}{x}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\boxed{\text{La recta de ecuación } y = 0 \text{ por la izquierda (el semieje negativo de abscisas) es asíntota de la función.}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-12}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3-\frac{12}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} = 3$$

$$\boxed{\text{La recta de ecuación } y = 3 \text{ por la derecha, es asíntota de la función}}$$

CONTROL 13 Examen de la segunda evaluación 14 MAR 08

1. Halla razonadamente los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to -2}\frac{6+x-x^2}{4+x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x^2-6x} \qquad c)\ \lim_{x\to -4^+}\frac{x+1}{x+4} \qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2}{3x^2-2}$$

RESPUESTAS

$$a)\ \lim_{x\to -2}\frac{6+x-x^2}{4+x^2}=\frac{6+(-2)-(-2)^2}{4+(-2)^2}=\frac{0}{8}=\boxed{0}$$

$$b)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x^2-6x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x^2+3x+9)}{2x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{2x}=\frac{27}{6}=\boxed{\frac{9}{2}}$$

$$c)\ \lim_{x\to -4^+}\frac{x+1}{x+4}=\boxed{-\infty}$$ (porque el numerador tiende a -3 y el denominador a 0^+)

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-12x+9}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

2. Sea f la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+5}{x-2} & \text{si } x\le 1\\[2mm] \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x>1\end{cases}$. Halla razonadamente:

$a)$ Su dominio de definición; $b)$ Los puntos de corte con el eje X ; $c)$ Los puntos de corte con el eje Y .

RESPUESTAS

a) Dominio de definición:

El dominio de f es el conjunto de valores de x para los que $f(x)$ es un número real, es decir: $D(f)=\{x\in\Re \mid f(x)\in\Re\}$

Para $x\le 1$, es decir, en el intervalo $(-\infty,\ 1]$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$ y no hay ningún valor de x para el que $f(x)$ no sea un número real (el único valor que anula el denominador es $x=2$ pero 2, no es menor o igual a 1).

Para $x>1$, esto es, en el intervalo $(1,\ +\infty)$ la función está definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$ y, aunque el denominador se anula para $x=\pm 3$, únicamente el valor $x=3$ es mayor que 1.

Conclusión: $D(f)=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)-\{3\}$,es decir, para el único valor que no está definida la función es para $x=3$.

$$\boxed{D(f)=\Re-\{3\}}$$

b) Puntos de corte con el eje X :

En los puntos de corte con el eje X , la y , es decir, $f(x)$, vale 0 , por lo tanto se trata de calcular las antimágenes de 0

Veamos si para algún valor del primer intervalo, $(-\infty, 1]$, se verifica que $f(x)=0$

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x+5}{x-2}=0 \;\Rightarrow\; x=-5 \;\Rightarrow\; \text{Punto } (-5,0)$$

En el segundo intervalo, es decir, $(1,+\infty)-\{3\}$

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{x^2-9}=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \text{ que no es mayor que } 1$$

Al eje X únicamente lo corta en el punto $(-5\ ,\ 0)$

c) Punto de corte con el eje Y :

En el punto en que la gráfica corta al eje $Y \Rightarrow$ la abscisa $x=0$ y como este valor pertenece al primer intervalo:

$$f(0)=\frac{0+5}{0-2}=-\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \text{Punto } (0\,,\,-5/2)$$

Al eje Y lo corta en el punto $(0\ ,\ -5/2)$

3. Sean las rectas: $r\equiv(x-2y+3=0)$; $s\equiv(-2x+4y+1=0)$; $t\equiv(x+2y-4=0)$. Halla razonadamente:

$a)$ Las pendientes, m_r, m_s y m_t, y las ordenadas en el origen, b_r, b_s y b_t, de las rectas r, s y t.

$b)$ Los ángulos α, β y γ que, respectivamente, forman: r con s, r con t y s con t

$c)$ Las distancias, $d(r,s)$, $d(r,t)$ y $d(s,t)$, entre las rectas.

RESPUESTAS

a) Las pendientes, y las ordenadas en el origen, las obtendremos pasando las ecuaciones a su forma explícita $y=mx+b$; m representa la pendiente y b su ordenada en el origen:

$r\equiv\ (x-2y+3=0) \Leftrightarrow$	$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow$	$m_r=\frac{1}{2}$	$b_r=\frac{3}{2}$
$s\equiv(-2x+4y+1=0) \Leftrightarrow$	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \Rightarrow$	$m_s=\frac{1}{2}$	$b_s=\frac{-1}{4}$
$t\equiv\ (x+2y-4=0) \Leftrightarrow$	$y=\frac{-1}{2}x+2 \Rightarrow$	$m_t=\frac{-1}{2}$	$b_t=2$

b) Hemos averiguado en el apartado anterior que las rectas r y s tienen la misma pendiente lo que significa que tienen la misma dirección luego el ángulo que forman entre sí es

$\boxed{\alpha=0}$.

Para hallar el ángulo $\beta = \gamma$ que forman r o s con t utilizaremos como vectores directores, respectivamente, $\overrightarrow{u_r} = (2,1)$ y $\overrightarrow{u_t} = (2,-1)$ obtenidos a partir de las pendientes

$$\cos\beta = \left|\cos(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_t}\right|} = \frac{\left|(2,1)\cdot(2,-1)\right|}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta = \gamma = 53'13^{\circ}}$$

c) Tomaremos como distancia entre las rectas r y s, que son paralelas, la que va desde un punto cualquiera de ellas , por ejemplo, $P(1,2) \in r$ a la otra, $s \equiv (-2x+4y+1=0)$:

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{\left|-2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\right|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}} = \frac{7}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{7\sqrt{5}}{10}\ \text{u.l.}}$$

$\boxed{d(r,t) = d(s,t) = 0}$ ya que r y s se cortan con t.

4. Dados los puntos: $A(-1,5)$, $B(3,2)$ y $C(-2,k)$. Halla razonadamente el valor de k para que:
$a)$ Los tres puntos estén alineados. $b)$ Las rectas $r \equiv (A,B)$ y $s \equiv (A,C)$ sean perpendiculares entre sí.

RESPUESTAS

a) Si los tres puntos estén alineados, C tiene que pertenecer a la recta que definen A y B y, por lo tanto, cumplir su ecuación… que determinamos :

$\overrightarrow{AB} = (3-(-1), 2-5) = (4,-3) \Rightarrow$ la ecuación de la recta que definen A y B es:

$$\frac{x-(-1)}{4} = \frac{y-5}{-3} \Rightarrow 3x+4y-17=0$$

Si $C \in r \Rightarrow 3\cdot(-2)+4k-17=0 \Rightarrow$

$$\boxed{k = \frac{23}{4}}$$

b) Si $r \equiv (A,B)$ y $s \equiv (A,C)$ son perpendiculares, también lo serán los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y su producto escalar valdrá 0 y como $\overrightarrow{AB} = (4,-3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, k-5)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (4,-3)\cdot(-1,k-5) = 0 \Rightarrow -4-3k+15=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{11}{3}}$$

CONTROL 12 (IºB) FUNCIONES 29 FEB 08

1. Halla **RAZONADAMENTE** las expresiones analíticas de tres funciones g, h, i cuya composición sea la función f definida por $f(x)=\log(x^3-5)$ y comprueba el resultado.
2. Se ha comprobado experimentalmente que la solubilidad del *nitrato de plata* en agua (medida en g de soluto/$100g$ de agua) es de $23'75$ a una temperatura de $15^o C$ y de $30'5$ cuando la temperatura es de $20^o C$. Halla **RAZONADAMENTE** la función de interpolación lineal e indica su utilidad.

RESPUESTAS

1. Se trata de hallar las fórmulas de $g(x)$, $h(x)$ y $i(x)$ de manera que $f(x)=(g\circ h\circ i)(x)$
Como $(g\circ h\circ i)(x)=g[h[i(x)]]$ y para hallar la imagen de un valor de x en la función f hay que hacer, y en este orden, 1^o elevar al cubo, 2^o restar 5 y 3^o hallar el logaritmo, estas serán las operaciones que, para obtener la imagen de un valor de x, tendrán que realizar, respectivamente, cada una de las funciones para que al componerlas den como resultado $f(x)$ es decir:

$$x \xrightarrow{i} x^3 \xrightarrow{h} x^3-5 \xrightarrow{g} \log(x^3-5) \quad = \quad f(x)$$

$$x \xrightarrow{i} i(x) \xrightarrow{h} h[i(x)] \xrightarrow{g} g[h[i(x)]] \quad = \quad f(x)$$

$$x \xrightarrow{\quad g\circ h\circ i \quad} (g\circ h\circ i)(x) = f(x)$$ por lo tanto:

$\boxed{g(x)=\log x}$ $\boxed{h(x)=x-5}$ $\boxed{i(x)=x^3}$

Comprobación: $(g\circ h\circ i)(x)=g[h[i(x)]]=g[h(x^3)]=g(x^3-5)=\log(x^3-5)=f(x)$

2. Sea x la temperatura (medida en ºC) y $f(x)$ la solubilidad del *nitrato de plata* (medida en g de soluto/$100g$ de agua).
Tenemos los datos obtenidos experimentalmente: $f(15)=23'75$ y $f(20)=30'5$

Se trata de obtener una función de la forma $p(x)=ax+b$ de manera que $p(15)=23'75$ y $p(20)=30'5$.

$$\left.\begin{array}{l} p(15)=23'75 \quad\Rightarrow\quad 15a+b=23'75 \\ p(20)=30'5 \quad\Rightarrow\quad 20a+b=30'5 \end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema obtenemos: $\begin{cases} a=1'35 \\ b=3'5 \end{cases}$

Comprobación: $\begin{cases} 15\cdot 1'35+3'5=23'75 \\ 20\cdot 1'35+3'5=30'5 \end{cases}$

$\boxed{\text{La función de interpolación es: } p(x)=1'35x+3'5}$

Los valores de $p(x)$ serán una aproximación (obtenida por interpolación lineal) de los valores reales de $f(x)$ para $x\in(15\ ,\ 20)$ es decir, la función de interpolación sirve para obtener de manera aproximada la solubilidad del nitrato de plata en agua a temperaturas comprendidas entre 15 y 20 ºC.

CONTROL 12 (IºC) FUNCIONES 29 FEB 08

1. *Halla* ***RAZONADAMENTE*** *el recorrido de la función definida por* $f(x)=18x^2+12x-1$
2. *Halla* ***RAZONADAMENTE*** *la función recíproca de* g *definida por* $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ *y comprueba el resultado haciendo las composiciones que lo demuestran.*

RESPUESTAS

1. El recorrido de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, es decir, conjunto de valores de $f(x)$. Como en este caso se trata de una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo, su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba por lo que el recorrido será el intervalo que va desde $f(\frac{-b}{2a})$ hasta $+\infty$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{2\cdot 18}=\frac{-1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(\frac{-1}{3})=18(\frac{-1}{3})^2+12(\frac{-1}{3})-1=-3$$

Recorrido de f :

$R(f)=[-3\ ,\ +\infty)$

2. Las funciones recíprocas tienen intercambiados los valores de cada par de valores $(x\ ,y)$ por lo que al hacer la composición de una función con su recíproca, el resultado es la función identidad, esto es, la imagen de todo valor de x es el mismo valor x.

$$g(x)=\frac{2x-1}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{2x-1}{x+3}$$

Para obtener su recíproca, intercambiamos las variables: $x=\dfrac{2y-1}{y+3}$

Despejando y: $xy+3x=2y-1 \Rightarrow 3x+1=2y-xy \Rightarrow 3x+1=(2-x)y \Rightarrow y=\dfrac{3x+1}{2-x}$

La recíproca de g está definida por:

$$g^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2-x}$$

Comprobación:

$$\left\{\begin{array}{l}(g\circ g^{-1})(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left(\dfrac{3x+1}{2-x}\right)=\dfrac{2\left(\dfrac{3x+1}{2-x}\right)-1}{\dfrac{3x+1}{2-x}+3}=\dfrac{6x+2-2+x}{3x+1+6-3x}=\dfrac{7x}{7}=x\\[2ex](g^{-1}\circ g)(x)=g^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)=\dfrac{3\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)+1}{2-\dfrac{2x-1}{x+3}}=\dfrac{6x-3+x+3}{2x+6-2x+1}=\dfrac{7x}{7}=x\end{array}\right.$$

CONTROL 11 FUNCIONES 14 FEB 08

Sea f la función definida por f(x)= $\sqrt{6x^2-5x-6}$.

1. *Halla,* ***RAZONADAMENTE*** *el dominio de f*
2. ***JUSTIFICA*** *si* $2\sqrt{2}$ *pertenece al recorrido de f y, en caso afirmativo halla su (o sus) antiimágenes.*

RESPUESTAS

1. El dominio de f es el conjunto de valores de x que tiene imagen, es decir:

$$D(f) = \{x \in \Re \mid f(x) \in \Re\}$$

Para que $f(x)=\sqrt{6x^2-5x-6}$ sea real se tiene que cumplir que $6x^2-5x-6 \geq 0$

$$6x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 6\cdot(-6)}}{2\cdot 6}=\frac{5\pm 13}{12}=\begin{cases}\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\\ \frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Como $\forall x \in (-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) \Rightarrow 6x^2-5x-6<0$ el dominio de f es:

$$\boxed{D(f)=\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)}$$

2. Que $2\sqrt{2}$ pertenezca al recorrido de f significa que debe existir algún valor de x para el que

$$f(x)=2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{6x^2-5x-6}=2\sqrt{2}$$

Resolviendo la ecuación comprobaremos si existe dicho valor de x:

$$\sqrt{6x^2-5x-6}=2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{6x^2-5x-6}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 6x^2-5x-6=8 \Rightarrow 6x^2-5x-14=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 6\cdot(-14)}}{2\cdot 6}=\frac{5\pm 19}{12}=\begin{cases}\frac{24}{12}=2\\ \frac{-14}{12}=-7/6\end{cases}$$

Comprobaciones:

$$f(2)=\sqrt{6\cdot 2^2-5\cdot 2-6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow f^{-1}(2\sqrt{2})=2$$

$$f(\frac{-7}{6})=\sqrt{6\cdot\left(\frac{-7}{6}\right)^2-5\cdot\left(\frac{-7}{6}\right)-6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow f^{-1}(2\sqrt{2})=\frac{-7}{6}$$

Por lo tanto,

$\boxed{2\sqrt{2} \text{ pertenece al recorrido de } f \text{ y sus antiimágenes son } x=2 \text{ y } x=-\frac{7}{6}}$

CONTROL 10 Geometría analítica 14 FEB 08

1. Dados los puntos P(−1 , 5) , Q(6 , −2) y R(5 , 4):

a. Expresa el vector $[\overrightarrow{RQ}]$ como combinación lineal de los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$ y $[\overrightarrow{PR}]$

b. Halla, racionalizado y simplificado, el valor del coseno del ángulo α que forman los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$ y $[\overrightarrow{PR}]$

c. Deduce la ecuación general de la recta que es mediatriz del segmento PQ.

RESPUESTAS

a) Se trata de hallar dos números reales k_1 y k_2 tales que $[\overrightarrow{RQ}] = k_1 [\overrightarrow{PQ}] + k_2 [\overrightarrow{PR}]$

Pero, cualesquiera que sean los puntos *P, Q y R,* por definición de suma de vectores tiene que cumplirse:

$$[\overrightarrow{PR}] + [\overrightarrow{RQ}] = [\overrightarrow{PQ}] \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{[\overrightarrow{RQ}] = [\overrightarrow{PQ}] - [\overrightarrow{PR}]}$$

Lo comprobaremos en este caso particular a partir de las coordenadas:

Como $P(-1 , 5) , Q(6 , -2)$ y $R(5 , 4)$ $\Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{RQ}] = [\overrightarrow{OQ}] - [\overrightarrow{OR}] = (1,-6) \\ [\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{OQ}] - [\overrightarrow{OP}] = (7,-7) \\ [\overrightarrow{PR}] = [\overrightarrow{OR}] - [\overrightarrow{OP}] = (6,-1) \end{cases}$

$[\overrightarrow{RQ}] = k_1 [\overrightarrow{PQ}] + k_2 [\overrightarrow{PR}]$ demostraremos que tiene que ser $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$:

$$(1 , -6) = k_1(7 , -7) + k_2 (6 , -1) \Rightarrow \begin{cases} 7k_1 + 6k_1 = 1 \\ -7k_1 - 1k_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolviendo el sistema: } \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

b) Hallaremos $\cos\alpha$ a partir del producto escalar de los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{PQ}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{PR}]$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} =$$

$$= \frac{(7,-7)\cdot(6,-1)}{\sqrt{7^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = \frac{7\cdot6 + (-7)(\cdot(-1)}{\sqrt{49\cdot2}\cdot\sqrt{37}} = \frac{49}{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{74}} = \frac{7\sqrt{74}}{74}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{7\sqrt{74}}{74}}$$

c) La mediatriz del segmento PQ está determinada por el punto medio de PQ

$$M\left(\frac{-1+6}{2}, \frac{5+(-2)}{2}\right) \Rightarrow M(5/2 , 3/2)$$

Y por un vector perpendicualar a $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (7,-7)$ por ejemplo el vector $\overrightarrow{u_n} = (1 , 1)$

$\vec{u} = (7 , -7)$ y $\overrightarrow{u_n} = (1 , 1)$ son perpendiculares porque su producto escalar vale 0

La ecuación de la recta es: $\dfrac{x - \frac{5}{2}}{1} = \dfrac{y - \frac{3}{2}}{1} \Leftrightarrow 2x - 5 = 2y - 3$ y en la forma general:

$$\boxed{x - y - 1 = 0}$$

CONTROL 9 (Iº B) Geometría analítica 29 ENE 08

1. *Halla el punto en el que se cortan la recta $r \equiv (2x+3y-4=0)$ y la recta s que pasa por el puntoP(-1 , 2) y es perpendicular a r.*

RESPUESTA

Un vector director de *s* (por ser perpendicular a *r*) es $\overrightarrow{v_s}$ = (2 , 3) y como conocemos un punto de la misma P(-1 , 2) obtenemos su ecuación de forma inmediata:

$$\frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

El punto en que se cortan *r* y *s* es el que tenga unas coordenadas que cumplan las ecuaciones de ambas rectas y lo obtendremos resolviendo el sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=-7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 2} 4x+6y=8 \\ \xrightarrow{\cdot 3} 9x-6y=-21 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{r} 13x=-13 \\ x=-1 \end{array}$$

por lo que $y = 2$

$$\text{Comprobación:} \begin{cases} 2\cdot(-1)+3\cdot 2=4 \\ 3\cdot(-1)-2\cdot 2=-7 \end{cases}$$

El punto en que se cortan *r* y *s* es el $(-1 , 2)$

2. *En cierto sistema de referencia, A(-1 , 3) y D(2 , 5) . Halla las coordenadas de los puntos B y C que dividen al segmento AD en tres partes iguales.*

RESPUESTA

A	B	C	D
(-1 , 3)	(b_1 , b_2)	(c_1 , c_2)	(2 , 5)

Como las coordenadas de un vector son las de su extremo menos las de su origen:

$$\overrightarrow{AD} = (3 , 2) \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = (b_1+1 , b_2-3) \quad ; \quad \overrightarrow{CD} = (2-c_1 , 5-c_2)$$

A partir de la relación existente entre estos vectores hallaremos las coordenadas de B y de C

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow (3 , 2) = 3\,(b_1+1 , b_2-3) \Rightarrow \begin{cases} 3(b_1+1)=3 \Rightarrow b_1 = 0 \\ 3(b_2-3)=2 \Rightarrow b_2 = 11/3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{CD} \Rightarrow (3 , 2) = 3(2-c_1 , 5-c_2) \Rightarrow \begin{cases} 3(2-c_1)=3 \Rightarrow c_1 = 1 \\ 3(5-c_2)=2 \Rightarrow c_2 = 13/3 \end{cases}$$

Los puntos son

B(0 , 11/3) y C(1 , 13/3)

CONTROL 9 (Iº C) Geometría analítica 25 ENE 08

Dados los puntos A(-1 , 3) ; B(2 , 5) y C(4 , -2) halla razonadamente:

1. *El ángulo que forman las rectas que pasan, respectivamente, por A y B y por A y C.*
2. *La ecuación general de la recta que pasa por C y es perpendicular a la que pasa por A y B.*

RESPUESTAS

1. Las dos rectas forman entre sí cuatro ángulos que son iguales dos a dos por lo que los dos ángulos distintos son suplementarios (suman 180º). Uno de éstos ángulos es el que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (o cualesquiera proporcionales a ellos) al que denominaremos α. Hallaremos este ángulo a partir del producto escalar de dichos vectores.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 5) - (-1, 3) = (3, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (4, -2) - (-1, 3) = (5, -5) \text{ utilizaremos } \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = (1, -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = (3, 2) \cdot (1, -1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC'}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC'}\right|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ por lo que: } \alpha = 78'69^{\circ}$$

El ángulo que forman las dos rectas es de $78'69^{\circ}$

2. Como el vector $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ es perpendicular a la recta, la ecuación de ésta será de la forma:

$$3x + 2y + k = 0$$

Como, además, tiene que pasar por el punto C(4 , -2) debe verificarse que

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

La ecuación general de la recta que pasa por C y es perpendicular a la que pasa por A y B es:

$$\boxed{3x + 2y - 8 = 0}$$

CONTROL 8 / EXAMEN de REPASO de la 1ª EVALUACIÓN / 11 ENE 08

1. *Calcula, **razonadamente**, el valor de k para que* $\dfrac{k-2i}{3+4i}$ *sea un número real.*

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto, "MATEMÁTICAS I" – edebé (Ejemplo resuelto. Pág. 105 / Ej. C.).

2. *Simplifica, **razonadamente y lo más posible**, la expresión:* $\dfrac{sen^2(\pi-\alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)}{sen\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)\cdot sen(2\pi-\alpha)}$

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto, "MATEMÁTICAS I" – edebé (Ejemplo resuelto. Pág. 126 / Ej. B-a.).

3. *Resuelve, **razonadamente**, la ecuación:* $sen\ x + sen\ 3x = 0$.

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto, "MATEMÁTICAS I" – edebé (Ejemplo resuelto. Pág. 142 / Ej. 13.).

4. *Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es z' =* $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. *Halla, **razonadamente**, z y las otras dos raíces.*

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto, "MATEMÁTICAS I" – edebé (Ejemplo resuelto. Pág. 149 / Ej. C.).

5. *Las componentes de* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *respecto de cierta base son:* $\vec{u} = (5, 0)$, $\vec{v} = (2, 1)$ *y* $\vec{w} = (1, -2)$. *Expresa el vector* $\vec{u}$ *como combinación lineal de* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$. ***Razona la respuesta***.

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto, "MATEMÁTICAS I" – edebé (Ejemplo resuelto. Pág. 159 / Ej. 3.).

CONTROL 7 / EXAMEN de la 1ª EVALUACIÓN / 04 DIC 07

1. *Expresa β en función de α sabiendo que, en todos los casos, $\alpha \in [0^o , 90^o]$ y $\beta \in [90^o , 360^o]$. Justifica las respuestas.*

a) sen β = sen α	d) sen β = cos α
b) cos β = cos α	e) cos β = sen α
c) tg β = tg α	f) tg β = cotg α

RESPUESTA

Lo que tenemos que hacer es, en el sistema de referencia goniométrico, ver qué dos ángulos corresponden a los puntos de la circunferencia, cuyas coordenadas coincidan; α será el del primer cuadrante y, β, el otro.

a) sen β = sen α $\Rightarrow$ Tienen que coincidir las ordenadas correspondientes a β y α $\Rightarrow \boxed{\beta = 180^o - \alpha}$

b) cos β = cos α $\Rightarrow$ Tienen que coincidir las abscisas $\Rightarrow \boxed{\beta = 360^o - \alpha}$

c) tg β = tg α $\Rightarrow$ Tienen que ser opuestas tanto las ordenadas como las abscisas para que coincidan sus cocientes $\Rightarrow \boxed{\beta = 180^o + \alpha}$

d) sen β = cos α $\Rightarrow$ La ordenada correspondiente a β tiene que coincidir con la abscisa correspondiente a α $\Rightarrow \boxed{\beta = 90^o + \alpha}$

e) cos β = sen α $\Rightarrow$ La abscisa correspondiente a β tiene que coincidir con la ordenada correspondiente a α $\Rightarrow \boxed{\beta = 270^o + \alpha}$

f) tg β = tg α $\Rightarrow$ La ordenada y la abscisa correspondientes a β tienen que ser, respectivamente, opuestas a la abscisa y ordenada correspondientes a α $\Rightarrow \boxed{\beta = 270^o - \alpha}$

2. *Sabiendo que sec $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ y que $0^o < \alpha < 90^o$, sin utilizar la calculadora y dejando los resultados racionalizados y simplificados, deduce los valores de:*

a) sen α	d) sen $(\alpha + \pi/3)$
b) cos $(-\alpha)$	e) cos 2α
c) tg $(\alpha - \pi/4)$	f) $tg^2 \alpha/2$

RESPUESTA

Como vamos a necesitarlos, empezaremos hallando los valores del seno, del coseno y de la tangente de α, que son todos positivos pues α es del primer cuadrante:

Por ser el coseno la inversa del secante, sec $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ cos $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{sen}\ \alpha \cdot \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$$

a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

c) $\text{tg}(\alpha - \pi/4) = \frac{tg\alpha - tg(\pi/4)}{1+tg\alpha\cdot tg(\pi/4)} = \frac{\frac{1}{2}-1}{1+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{-1/2}{3/2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

d) $\text{sen}(\alpha + \pi/3) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos(\pi/3) + \cos\alpha \cdot \text{sen}(\pi/3) =$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{10}}$$

e) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{5}}$

f) $\text{tg}^2\alpha/2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \boxed{9-4\sqrt{5}}$

3. *Sean A, B y C tres puntos del plano. Sabiendo que $\overline{AB}$ =50 m, $\overline{AC}$ =75 m y el ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es de 120º. Halla razonadamente: a) $\overline{BC}$; b) El ángulo que forman $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$; c) La distancia más corta (altura) entre A y $\overline{BC}$.*

RESPUESTA

a) Como conocemos dos lados y el ángulo que forman, el otro lado lo hallamos directamente aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\ \hat{}A$$

como $a = \overline{BC}$; $b = \overline{AC} = 75$ m ; $c = \overline{AB} = 50$ m y $\hat{}A = 120°$. Sustituyendo, obtenemos:

$$\overline{BC} = \sqrt{75^2 + 50^2 - 2\cdot 75\cdot 50\cdot\cos 120°} = 108'97$$

$$\boxed{\overline{BC} = 108'97 \text{ m}}$$

b) El ángulo que forman $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ es decir $\hat{}B$ lo hallamos aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\hat{}A} = \frac{b}{sen\hat{}B} \Rightarrow sen\hat{}B = \frac{b}{a}sen\hat{}A = \frac{75}{108{,}97}sen120 = 0'596 \Rightarrow$$

Si sen ^B = 0'596 $\Rightarrow$ ^B puede ser $\begin{cases} \wedge B_1 = 36'587^o \\ \wedge B_2 = 143'413^o \end{cases}$

Pero como ^A + ^B + ^C = 180° y ^A = 120° $\Rightarrow$ ^B tiene que ser 36'587°

> El ángulo que forman $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ es:
>
> ^B = 36'587°

c) Sea P el punto en que la altura que va desde A hasta el lado $a = \overline{BC}$ corta a éste.

El triángulo formado por los puntos A, P y B es rectángulo, pues $\overline{AP}$ es perpendicular a $\overline{BC}$, y de él conocemos la hipotenusa $\overline{AB}$ = 50 m y el ángulo ^B = 36'587° y nos piden el valor de $\overline{AP}$, cateto opuesto a ^B.

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cdot sen\ \wedge B = 50 \cdot 0'596 = 29'80$$

> La distancia más corta (altura) entre A y $\overline{BC}$ es:
>
> $\overline{AP}$ = 29'80 m

4. *Halla* $(i\sqrt{3}-1)^{11}$ *dejando el resultado en forma binómica.*

RESPUESTA

Pasaremos la base de la potencia a la forma polar, hallaremos la potencia y devolveremos el resultado a la forma binómica:

El complejo z = $i\sqrt{3}-1$ tiene como afijo el punto P(-1 , $\sqrt{3}$) que pertenece al 2° cuadrante.

El módulo de z, es decir, la longitud de $\overline{OP}$ es: $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

Teniendo en cuenta que P pertenece al 2° cuadrante y que tg$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

El argumento de z es: $\alpha = 120°$ por lo tanto: $z = 2_{120^o}$ y

$z^{11} = (2_{120^o})^{11} = (2^{11})_{120\cdot 11} = 2048_{1320^o}$ y, como 1320º = 3 · 360º + 240º

$z^{11} = 2048_{240^o}$ que expresado en forma binómica es:

$$z^{11} = 2048\ (\cos 240^o + i\cdot sen\ 240^o) = 2048\cdot(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$\boxed{(i\sqrt{3}-1)^{11} = -1024 - (1024\sqrt{3})i}$$

CONTROL 6 TRIGONOMETRÍA 22 NOV 07

1. *A, B y C son los vértices de un triángulo del que sabemos: tg A = 3/4 ; $\overline{AB}$ = 4 cm ; $\overline{BC}$ = 3 cm y no se trata de un triángulo rectángulo. Halla razonadamente el valor de $\overline{AC}$.*

Lo resolveremos aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$3^2 = b^2 + 4^2 - 2 \cdot b \cdot 4 \cdot 0'8$$

$$b^2 - 6'4b + 7 = 0$$

Soluciones: $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_2 = 1'4 \end{cases}$

Datos:

$a = \overline{BC} = 3$ cm

$c = \overline{AB} = 4$ cm

tg A = 3/4 $\Rightarrow$ A = 36'87º $\Rightarrow$ cos A = 0'8

Nos piden: $\overline{AC} = b = ?$

El valor $b = 5$ corresponde a un triángulo rectángulo (b sería la hipotenusa) por lo que la rechazamos, por lo tanto, la respuesta es:

$$\boxed{\overline{AC} = 1'4 \text{ cm}}$$

2. *A, B y C son los vértices de un triángulo del que sabemos: tg A = 0'8 ; $\overline{AB}$ = 10 cm; $\overline{BC}$ = 8 cm y no se trata de un triángulo rectángulo. Halla razonadamente el valor de $\overline{AC}$.*

Aunque es más directo resolverlo aplicando el teorema del coseno (ver ejercicio anterior) lo haremos aplicando el teorema del seno, por variar.

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \Rightarrow \frac{8}{0'6247} = \frac{10}{senC} \Rightarrow sen\,C = 0'7809 \Rightarrow$$

hay dos posibles soluciones $\begin{cases} C_1 = 51'34^\circ \\ C_2 = 128'66^\circ \end{cases}$

Conocidos los valores de los ángulos A y C la obtención de B es inmediata ya que entre los tres tienen que sumar *180º*: $\begin{cases} B_1 = 90^\circ \\ B_2 = 12'68^\circ \end{cases}$

Por ajustarnos al enunciado, rechazamos la primera posibilidad y obtendremos b aplicando de nuevo el teorema del seno:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow \frac{8}{0'6247} = \frac{b}{sen12'68^\circ} \Rightarrow \boxed{b = \overline{AC} = 2'81 \text{ cm}}$$

Datos:

$a = \overline{BC} = 8$ cm

$c = \overline{AB} = 10$ cm

tg A = 0'8 $\Rightarrow$

A = 38'66º $\Rightarrow$

sen A = 0'6247

Nos piden:

$\overline{AC} = b = ?$

3. Resuelve la ecuación: *tg 2x = 3 tg x*

$tg\,2x = 3\,tg\,x$ (1)

$\dfrac{2tg\;x}{1-tg^2x} = 3tg\,x$ (2) (3)

$2tgx = 3tgx - 3tg^3x$ (4)

$3tg^3x - tg\,x = 0$ (5)

$tg\,x\,(3tg^2x - 1) = 0$ (6)

- $tg\,x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k$
- $3\,tg^2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; tg^2x = 1/3$

$$\begin{cases} tgx = 1/\sqrt{3} & x = 30^\circ + 180^\circ k \\ tgx = -1/\sqrt{3} & x = -30^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

(1) $tg\,2x = \dfrac{2tg\;x}{1-tg^2x}$

(2) Producto de extremos igual a producto de medios.

(3) Trasponemos términos.

(4) Sacamos factor común.

(5) Igualamos a 0 cada factor porque si un producto vale 0…

(6) Los ángulos que difieren en 180º tienen la misma tangente.

Soluciones: $\boxed{x = \begin{cases} 180^\circ k \\ \pm 30^\circ + 180^\circ k \end{cases} \quad k \in Z}$

4. Resuelve la ecuación: $sen^2 3x - \cos^2\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$sen^2 3x - \cos^2\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$ (1)

$1 - \cos^2 3x - \dfrac{1+\cos 3x}{2} = \dfrac{1}{2}$ (2)

$2 - 2\cos^2 3x - 1 - \cos 3x = 1$ (3)

$2\cos^2 3x + \cos 3x = 0$ (4)

$\cos 3x\,(2\cos 3x + 1) = 0$ (5) (6)

- $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = \pm 30^\circ + 120^\circ k$
- $2\cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

  $3x = \pm 120^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = \pm 40^\circ + 120^\circ k$

(1) $\begin{cases} sen^2 3x + \cos^2 3x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 3x}{2}} \end{cases}$

(2) Multiplicamos por 2 a los dos miembros para quitar denominadores.

(3) Restamos 1 a los dos miembros y los multiplicamos por −1.

(4) Sacamos factor común

(5) Igualamos a 0 cada factor.

(6) Los ángulos opuestos tiene el mismo coseno y cada 360º se repite su valor.

Soluciones: $\boxed{x = \begin{cases} \pm 30^\circ + 120^\circ k \\ \pm 40^\circ + 120^\circ k \end{cases} \quad k \in Z}$

CONTROL 5 TRIGONOMETRÍA 16 NOV 07

1. *Sin utilizar la calculadora halla el área de un triángulo que tiene un ángulo de 30º, otro de 45º y el lado que comparten dichos ángulos, mide 8 m. Deja el resultado racionalizado y simplificado y razona los cálculos que tengas que hacer.*

Sea ABC el triángulo en el que a = BC = 8 m, siendo B = 30º y C = 45º

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen\,C = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\cdot b\text{; tenemos que hallar } b$$

$$\text{Como } \frac{b}{senB} = \frac{a}{senA} \Rightarrow b = \frac{a\cdot senB}{senA} = \frac{8\cdot\frac{1}{2}}{senA} = \frac{4}{senA}\text{; necesitamos hallar } sen\,A$$

$$A = 180º - (B + C) = 180º - (30º + 45º) = 105º.$$

Como no nos permiten utilizar la calculadora, hallaremos el seno de *105º* a partir de las razones de *60º y 45º* ya que *105 = 60 + 45*.

$$Sen\,A = Sen\,105º = sen\,(60º + 45º) = sen\,60º\cdot\cos 45º + \cos 60º\cdot sen\,45º =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Sustituyendo en la expresión de b y ésta en la del área, obtenemos:

$$\text{Área} = 2\sqrt{2}\cdot b = 2\sqrt{2}\cdot\frac{4}{senA} = 2\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} =$$

$$= 8\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 8\sqrt{12} - 16 = 8\cdot 2\sqrt{3} - 16 = 16(\sqrt{3}-1)$$

$$\boxed{\text{Área} = 16\,(\sqrt{3} - 1)\ m^2}$$

2. *Resuelve la ecuación: cos 6x + sen 5x = cos 2x − sen 3x*

$\cos 6x + sen\,5x = \cos 2x - sen\,3x$	(1)	*(1) Transposición de términos*
$sen\,5x + sen\,3x = \cos 2x - \cos 6x$	(2)	*(2) Transformamos en productos*
$2\,sen\,4x\cdot\cos x = -2\,sen\,4x\cdot sen\,(-2x)$	(3)	*(3) sen (−2x) = −sen 2x y simplificamos, dividiendo por 2, y transponemos términos*
$sen\,4x\cdot\cos x - sen\,4x\cdot sen\,2x = 0$	(4)	*(4) Sacamos factor común a sen 4x*
$sen\,4x\,(\cos x - sen\,2x) = 0$	(5)	*(5) Ángulo doble*
$sen\,4x\,(\cos x - 2\,sen\,x\cdot\cos x) = 0$	(6)	*(6) Sacamos factor común a cos x*
$sen\,4x\cdot\cos x\cdot(1 - 2\,sen\,x) = 0$	(7)	*(7) Igualamos a 0 cada factor (porque si un producto vale 0…).*

- $sen\,4x = 0 \Rightarrow 4x = 180k \Rightarrow \boxed{x = 45ºk}\ (\forall k\in Z)$
- $\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90º + 180ºk}\ (\forall k\in Z)$
- $1 - 2\,sen\,x = 0 \Rightarrow sen\,x = 1/2 \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases}30º+360º\,k\\150º+360º\,k\end{cases}}\ (\forall k\in Z)$

CONTROL 4 (Iº C) TRIGONOMETRÍA 29 OCT 07

1. *Halla razonadamente el radio de una circunferencia en la que hay inscrito un pentágono regular de 5 cm de lado.*

Dividimos el pentágono en cinco triángulos isósceles iguales en los que el lado desigual tiene 5 cm de longitud y el ángulo opuesto a este lado es de 360º/5 = 72º.

El radio de la circunferencia coincide con los lados iguales de cada triángulo isósceles y la altura de este triángulo lo divide, a su vez, en dos triángulos rectángulos iguales cuya hipotenusa es el radio de la circunferencia, un cateto mide 5/2 = 2'5 cm y el ángulo opuesto a este lado 72º/2 = 36º, por tanto:

FALTA INSERTAR LA GRÁFICA

$$\text{sen } 36^{\circ} = \frac{2'5}{r} \Rightarrow r = \frac{2'5}{sen 36^{\circ}} = 4'25$$

El radio es de 4'25 cm.

2. *Sin utilizar la calculadora, halla razonadamente los valores exactos, racionalizados y simplificados, de las razones de 2550º*

Como 2550º = 7 · 360º + 30º, las razones trigonométricas de 2550º son las mismas que las de 30º por lo tanto:

$$\text{sen } 2550^{\circ} = \text{sen } 30^{\circ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{cosec } 2550^{\circ} = 2$$

$$\cos 2550^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec 2550^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 2550^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg } 2550^{\circ} = \sqrt{3}$$

sen 2550º	cos 2550º	tg 2550º	cotg 2550º	sec 2550º	cosec 2550º
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2

CONTROL 4 (Iº B) TRIGONOMETRÍA 30 OCT 07

1. Las bases de un trapecio isósceles miden, 18 cm y 25 cm, respectivamente y uno de los ángulos interiores es de 165º. Halla razonadamente lo que miden los lados iguales.

FALTA INSERTAR LA GRÁFICA

Dividimos el trapecio en un rectángulo (de base, 18 cm y de altura la del trapecio) y dos triángulos rectángulos iguales cada uno de los cuales tiene como hipotenusa uno de los lados iguales, l, del trapecio (el que tenemos que hallar) y uno de sus catetos mide, $\frac{25-18}{2} = 3'5 \text{ cm}$

El ángulo opuesto al cateto de 3'5 cm tiene $165^\circ - 90^\circ = 75^\circ$

$$sen\ 75^\circ = \frac{3'5}{l} \Rightarrow l = \frac{3'5}{sen 75^\circ} = 3'62$$

Los lados iguales del trapecio miden 3'62 cm.

2. Halla razonadamente, sin utilizar la calculadora, el valor exacto en radianes de los ángulos del primer giro cuya cosecante valga −2.

$$cosec\,\alpha = -2 \Rightarrow sen\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

FALTA INSERTAR LA GRÁFICA

tenemos que ver en el sistema de referencia goniométrico, a qué ángulos les corresponden puntos de la circunferencia cuya ordenada sea $-\frac{1}{2}$. Como sabemos que $sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}$, la respuesta es inmediata, los ángulos son: (180 + 30)° y (360 − 30)° y, como nos los piden en radianes:

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Los ángulos del primer giro cuya secante vale −2 son:

$$\frac{7\pi}{6} \text{ y } \frac{11\pi}{6}$$

CONTROL 3 (Iº B) TRIGONOMETRÍA 19 OCT 07

1. *El lado desigual de un triángulo isósceles mide 8 cm y el ángulo opuesto, $\frac{2}{15}\pi$ radianes, halla razonadamente la longitud de los lados iguales.*

FALTA INSERTAR LA FIGURA

La altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales en los que un cateto mide $\frac{8}{2}$ cm = 4 cm, el ángulo opuesto a este cateto tiene $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15}\pi$ Rad = $\frac{1}{15}\pi$ Rad y la hipotenusa es el lado del triángulo isósceles que queremos hallar.

Por lo tanto:

$$\text{Como} \quad sen\frac{1}{15}\pi = \frac{4}{l} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4}{sen\frac{1}{15}\pi} = \boxed{19'24\text{ cm}}$$

2. *La tangente de un ángulo vale 3/4. Halla razonadamente los valores exactos, expresados en forma de fracciones irreducibles, de las demás razones de dicho ángulo.*

Hallamos con la calculadora, el ángulo cuya tangente vale 3/4 y lo guardamos en su memoria. Una vez que tengamos el ángulo averiguamos, también con la calculadora, el seno y el coseno. Sabiendo el seno, el coseno y la tangente es inmediata la obtención de sus inversas: cosecante, secante y cotangente, respectivamente: *arctg* 3/4 = α

sen α = 0'6 = 6/10 = 3/5 $\Rightarrow$ cosec α = 5/3

cos α = 0'8 = 8/10 = 4/5 $\Rightarrow$ sec α = 5/4

tg α = 3/4 $\Rightarrow$ cotg α = 4/3

sen α = 3/5	cos α = 4/5	tg α = 3/4
cosec α = 5/3	sec α = 5/4	cotg α = 4/3

También podríamos haberlas obtenido dibujando un triángulo rectángulo cuyos catetos midiesen 3 y 4 unidades de longitud, respectivamente. El ángulo opuesto al cateto de 3 u.l. tendría como tangente 3/4. La hipotenusa del triángulo la hallaríamos aplicando el teorema de Pitágoras

(Hipot. = $+\sqrt{3^2+4^2}$ = 5 u.l.)

y ya es inmediato hallar todas las razones trigonométricas del ángulo a partir de sus definiciones.

CONTROL 3 (Iº C) / TRIGONOMETRÍA / 19 OCT 07

1. *Halla razonadamente el valor de los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 30 cm y 16 cm, respectivamente.*

FALTA INSERTAR LA FIGURA

Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales, cuyos catetos miden la mitad de las diagonales (es decir, 15 cm y 8 cm) y cuyos ángulos agudos, α y β valen la mitad de los del rombo.

$$tg\ \alpha = \frac{8}{15} \Rightarrow \alpha = arctg\ \frac{8}{15} \cong 28'07^{o}$$

$$y\ \ \beta = 90 - \alpha = 61'93^{o}$$

Luego los ángulos del rombo valen el doble, es decir:

$\boxed{56'14^{o} \text{ y } 123'86^{o}}$

2. *Demuestra que los ángulos complementarios tienen sus razones trigonométricas cruzadas, es decir, si α y β son complementarios, se cumple que:*

$$sen\ \alpha = cos\ \beta \qquad cos\ \alpha = sen\ \beta \qquad tg\ \alpha = cotg\ \beta$$
$$cosec\ \alpha = sec\ \beta \qquad sec\ \alpha = cosec\ \beta \qquad cotg\,\alpha = tg\ \beta$$

FALTA INSERTAR LA FIGURA

En todo triángulo rectángulo, sus ángulos agudos son complementarios, es decir, suman 90º por lo tanto lo que para uno de estos ángulos, α, es el cateto opuesto, para el otro, β es el cateto contiguo por lo tanto las igualdades anteriores son consecuencia de las definiciones de las razones trigonométricas. En efecto:

b es el cateto opuesto al ángulo α, por lo tanto el cateto contiguo a β,
c es el cateto contiguo a α por lo que es el cateto opuesto a β
y a es la hipotenusa.

Por definición:

Seno de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa; su inversa es la cosecante.
Coseno, la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa; su inversa es la secante.
Tangente es la razón entre cateto opuesto y cateo contiguo; su inversa es la cotangente.

Por lo tanto:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \cos\ \beta \qquad \Rightarrow \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{a}{b} = \text{sen } \beta$$

$$\cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \beta \qquad \Rightarrow \qquad \sec\ \alpha = \frac{c}{a} = \text{cosec } \beta$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \text{cotg } \beta \qquad \Rightarrow \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{c}{b} = \text{tg } \beta$$

CONTROL 2 Ecuaciones e inecuaciones 11 OCT 07

1. *Resuelve la ecuación:* $6-\sqrt{5-x^2}=x^2+3$

– Aislamos el radical restando 6 a los dos miembros:

$$-\sqrt{5-x^2}=x^2-3$$

– Elevamos al cuadrado los dos miembros y los efectuamos:

$$(-\sqrt{5-x^2})^2=(x^2-3)^2 \Rightarrow$$

$$5-x^2=x^4-6x^2+9$$

– Simplificamos la ecuación polinómica:

$$x^4-5x^2+4=0$$

– Se trata de una ecuación bicuadrada muy sencilla de resolver, por ejemplo factorizando el polinomio (por tanteo):

$$(x^2-4)\cdot(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=+2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos estas cuatro soluciones en la ecuación original y vemos que $x=\pm 2$ no la cumplen pero que $x=\pm 1$, sí.

Soluciones:
$x=+1$ y $x=-1$

2. *Resuelve la inecuación:* $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$

- Restamos 2 a los dos miembros:

$$\frac{x+1}{x-1} - 2 \leq 0$$

- Efectuamos la suma del primer miembro para reducirlo a una sola fracción:

$$\frac{3-x}{x-1} \leq 0$$

- Analizamos el signo de la fracción para los distintos valores de x

Signo de $\dfrac{3-x}{x-1}$	$+/-$ $-$	$+/+$ $+$	$-/+$ $-$
	$x = 1$	$x = 3$	

La inecuación se cumple para todos los valores de x para los que la fracción resulta negativa y para $x = 3$ que anula el numerador; es decir:

Soluciones:

$x < 1 \quad \cup \quad x \geq 3$

Es decir, los valores de

$(-\infty\, , 1) \quad \cup \quad [3\, , +\infty)$

CONTROL 1 Conocimientos previos 27 SEP 07

1. Si tomamos 0’33 como valor de $\frac{1}{3}$ ¿cuál es el error relativo que cometemos?

RESPUESTA

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real, por lo tanto:

$$\text{Error relativo} = \frac{\left|\frac{1}{3} - 0'33\right|}{\frac{1}{3}} = \frac{\left|\frac{1-0'99}{3}\right|}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{0'01}{3}}{\frac{1}{3}} = 0'01$$

El error relativo que se comete al tomar 0’33 como valor de 1/3 es 0’01 o, lo que es lo mismo, del 1%

2. Expresa $\frac{32^{-1}\cdot\sqrt[4]{8}}{4^{1/3}}$ como una sola potencia de base 2.

RESPUESTA

$$\frac{32^{-1}\cdot\sqrt[4]{8}}{4^{1/3}} = \frac{(2^5)^{-1}\cdot(2^3)^{1/4}}{(2^2)^{1/3}} = \frac{2^{-5}\cdot 2^{3/4}}{2^{2/3}} = 2^{-5+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 2^{-59/12}$$

$$\boxed{\frac{32^{-1}\cdot\sqrt[4]{8}}{4^{1/3}} = 2^{-59/12}}$$

Comprueba la igualdad con la calculadora.

3. Reduce a un solo radical la suma $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

RESPUESTA

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{8\cdot 2} + \sqrt[3]{27\cdot 2} = 2\cdot\sqrt[3]{2} + 3\cdot\sqrt[3]{2} = 5\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{250}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}}$$

Comprueba la igualdad con la calculadora.

4. ¿En qué base vale −2 el logaritmo de 3?

RESPUESTA

Sea x la base pedida $\Rightarrow \log_x 3 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Comprobación: $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2 \Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^{-2} = 3$ y como $(\frac{1}{\sqrt{3}})^{-2} = (\sqrt{3})^2 = 3 \Rightarrow$ es cierto

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y, racionalizando, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La base en la que el logaritmo de 3 vale −2 es: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Expresa el número 5 como potencia de base 3.

RESPUESTA

Sea x el exponente, es decir, supongamos que $3^x = 5$

$3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1'4649735$

$$\boxed{5 = 3^{1'4649735}}$$

Comprueba la igualdad con la calculadora.